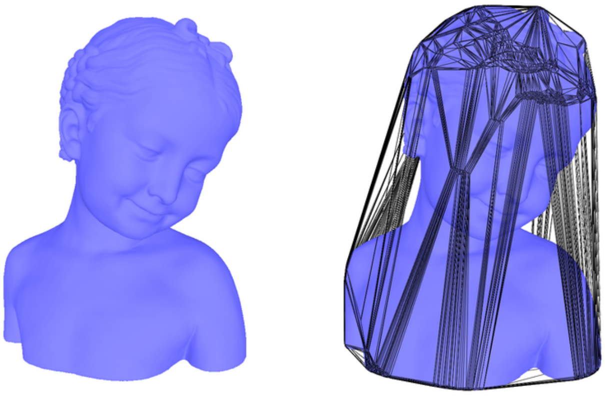

L'enveloppe convexe d'un modèle avec 192135 points.
par Susan Hert et Stefan Schirra

Enveloppe convexe de $SO_n(\mathbb{R})$

Auteurs :
M. Geoffrey Delpluque
M. Mohamed Nassiri

2021

1 Introduction

1.1 Quelques notations et résultats préliminaires

Définition 1.
$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MM^t = I_d\}$ *est le groupe orthogonal euclidien.*
$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$ *est le groupe spécial orthogonal euclidien ou groupe des rotations.*
$O_n^-(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \backslash SO_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 2. *Un sous-ensemble C d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V est un cône convexe si $\alpha x + \beta y \in C$, pour tous scalaires strictement positifs α, β et tous $x, y \in C$.*

Définition 3. *Soient G un groupe et X un ensemble. On dit que G agit (à gauche) sur X si on a une application*

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

telle que
(i) $\forall x \in X,\ 1.x = x$
(ii) $\forall (g, g') \in G^2,\ \forall x \in X,\ g.(g'.x) = gg'.x$

On notera $\mathcal{O}_G(x)$ l'orbite de x sous l'action de G.

Définition 4. *Pour M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N \leqslant_G M$ si $N \in \mathrm{Conv}(\{g.M \mid g \in G\})$.*

Remarque 5. *On considèrera ici $G = SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$ et l'action de groupe suivante :*

$$\begin{aligned} (SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ ((P, Q), M) &\mapsto (P, Q).M = PMQ^T \end{aligned}$$

Pour rappel, il se trouve que l'on un résultat assez connu concernant l'enveloppe convexe du groupe orthogonal euclidien :

Théorème 6. *L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $||.||_2$ (i.e)*

$$\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathbb{B}_{||.||_2}(0, 1)$$

Démonstration. On renvoie le lecteur à [SZP09]. □

Nous verrons que l'enveloppe convexe du groupe spécial orthogonal euclidien n'est pas aussi "ronde"...

Théorème 7. Décomposition en valeurs singulières
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une factorisation de la forme :

$$M = PDQ^T,$$

avec
$P \in O_n(\mathbb{R})$, $Q \in O_n(\mathbb{R})$, et $D \in \mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont des réels positifs ou nuls (les valeurs singulières de M).

Démonstration. On renvoie le lecteur à [AMO08]. □

Mais ce qui va surtout nous servir, c'est une décomposition en valeurs singulières « *sous le groupe spécial orthogonal* ». On a la décomposition suivante

Théorème 8. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une factorisation de la forme :*

$$M = PDQ^T = P\mathrm{diag}(s_1(M), \ldots, s_{n-1}(M), \mathrm{sign}(\det(M))s_n(M))Q^T,$$

avec
$P \in SO_n(\mathbb{R})$, $Q \in SO_n(\mathbb{R})$, et
$s_1(M) \geqslant \cdots \geqslant s_n(M)$ sont les valeurs singulières de M.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème précédent, on a la décomposition en valeurs singulières suivante

$$M = P\text{diag}(s_1(M), \ldots, s_n(M))Q^T,$$

avec $P \in O_n(\mathbb{R})$, $Q \in O_n(\mathbb{R})$, et $s_1(M) \geqslant \cdots \geqslant s_n(M)$ sont les valeurs singulières de M.
Trois cas s'offrent à nous :
• Si $P \in SO_n(\mathbb{R})$ et $Q \in SO_n(\mathbb{R})$: Alors, on a

$$\det(M) = \det(PDQ^T) = \underbrace{\det(P)}_{=1}\underbrace{\det(D)}_{\geqslant 0}\underbrace{\det(Q^T)}_{=1} \geqslant 0$$

Par conséquent, la formule est clairement vérifiée.

• Si $P \in O_n^-(\mathbb{R})$ et $Q \in O_n^-(\mathbb{R})$: On considère la matrice

$$G = \text{diag}(1, \ldots, 1, -1) \in O_n^-(\mathbb{R})$$

Par suite, on a

$$M = PDQ^T = PGGDGGQ^T = PGDGQ^T$$

avec $PG \in SO_n(\mathbb{R})$, $QG \in SO_n(\mathbb{R})$, et par ailleurs,

$$\det(M) = \det(PGDGQ^T) = \underbrace{\det(PG)}_{=1}\underbrace{\det(D)}_{\geqslant 0}\underbrace{\det(GQ^T)}_{=1} \geqslant 0$$

• Si $P \in O_n^-(\mathbb{R})$ et $Q \in SO_n(\mathbb{R})$: on a

$$M = PDQ^T = PGGDQ^T = PG\text{diag}(s_1(M), ..., s_{n-1}(M), -s_n(M))Q^T$$

avec $PG \in SO_n(\mathbb{R})$, $Q \in SO_n(\mathbb{R})$, et par ailleurs,

$$\det(M) = \det(PGDQ^T) = \underbrace{\det(PG)}_{=1}\underbrace{\det(\text{diag}(s_1(M), \ldots, s_{n-1}(M), -s_n(M)))}_{\leqslant 0}\underbrace{\det(Q^T)}_{=1} \leqslant 0$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 9. *Bien évidemment le cas $P \in SO_n(\mathbb{R})$ et $Q \in O_n^-(\mathbb{R})$ se démontre de la même façon...*

Remarque 10. *Il est important (pour la suite) de bien voir cette décomposition sous la forme de l'action de groupe suivante :*

$$\begin{aligned}(SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ ((P, Q), M) &\mapsto (P, Q).M = PMQ^T\end{aligned}$$

Cette *nouvelle* décomposition nous suggère la définition de l'ensemble suivant

Proposition 11. *On considère l'ensemble*

$$\mathcal{F} = \{(m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid m_{1,1} \geqslant \cdots \geqslant m_{n,n},\ m_{n-1,n-1} + m_{n,n} \geqslant 0,\ m_{i,j} = 0 \text{ pour } i \neq j\}$$

Alors :
1. *$\mathcal{F}$ est un cône convexe fermé.*
2. *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_G(M) \neq \varnothing$.*
3. *La famille suivante est une base de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire qu'elle est incluse dans $\mathcal{F}$ et engendre $\mathcal{F}$ par combinaison linéaire à coefficients positifs.*

$$\begin{aligned}F_1 &= \text{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0)\\ F_2 &= \text{diag}(1, 1, 0, ..., 0, 0, 0)\\ &\vdots\\ F_{n-2} &= \text{diag}(1, 1, 1, ..., 1, 0, 0)\\ F_{n-1} &= \text{diag}(1, 1, 1, ..., 1, 1, -1)\\ F_n &= \text{diag}(1, 1, 1, ..., 1, 1, 1)\end{aligned}$$

Démonstration.
1. Le fait que $\mathcal{F}$ soit un cône convexe fermé est évident.

2. La décomposition en valeurs singulières sous le groupe spécial orthogonal nous assure que, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_G(M) \neq \varnothing$.

3. La démonstration est laissée au lecteur. □

Lemme 12. *Soit F_i, $i = 1, ..., n$, une base de $\mathcal{F}$, alors $N \leqslant_G M$ si et seulement si $(M - N, F_i) \geqslant 0$.*

Démonstration. On renvoie le lecteur à [MLE87]. □

Théorème 13. *Soient M et N deux matrices de $\mathcal{F}$, alors $N \leqslant_G M$ si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(N) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(M) \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n-2\} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(N) - \operatorname{sign}(\det(N))s_n(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} s_i(M) - \operatorname{sign}(\det(M))s_n(M) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(N) + \operatorname{sign}(\det(N))s_n(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} s_i(M) + \operatorname{sign}(\det(M))s_n(M) \tag{3}$$

Démonstration. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{F}$. Grâce à la décomposition en valeurs singulières (sous le groupe spécial orthogonal), on peut écrire, dans l'espace $\mathcal{F}$, les matrices M et N sous la forme :

$$M = \operatorname{diag}(s_1(M), \ldots, s_{n-1}(M), \operatorname{sign}(\det(M))s_n(M)),$$
$$N = \operatorname{diag}(\sigma_1(N), \ldots, \sigma_{n-1}(N), \operatorname{sign}(\det(N))\sigma_n(N)).$$

Puisque F_i, $i = 1, ..., n$, est une base de $\mathcal{F}$, $N \leqslant_G M$ si et seulement si $(M - N, F_i) \geqslant 0$.
Or, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}(M - N, F_i) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Tr}((M-N)F_i^T) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Tr}((M-N)F_i) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Tr}(MF_i) \geqslant \operatorname{Tr}(NF_i)\end{aligned}$$

On obtient bien les inégalités voulues. □

Lemme 14. *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P, Q \in G$, alors $N \leqslant_G M$ si et seulement si $Q \cdot N \leqslant_G P \cdot M$*

Démonstration. Si $N \leqslant_G M$, alors $N \in \operatorname{Conv}(\mathcal{O}_G(M))$, en particulier il existe $a_i \geqslant 0$, $\sum_{i \in I} a_i = 1$ avec I fini tel que $N = \sum_{i \in I} a_i R_i \cdot M$ avec $R_i \in G$. On a alors

$$Q \cdot N = Q\big(\sum_{i \in I} a_i R_i \cdot M\big) = \sum_{i \in I} a_i (QR_i) \cdot M$$

Comme G est un groupe, pour tout $i \in I$, il existe $P_i \in G$ ($P_i = QR_iP^{-1}$) tel que $QR_i = P_iP$. Ainsi,

$Q \cdot N = \sum_{i \in I} a_i P_i P \cdot M$ et donc $Q \cdot N \leqslant_G P \cdot M$.

Pour la réciproque le raisonnement est le même en considérant P^{-1} et Q^{-1}. □

Théorème 15. *Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $N \leq_G M$ si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(N) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(M) \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n-2\} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(N) - \operatorname{sign}(\det(N))s_n(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} s_i(M) - \operatorname{sign}(\det(M))s_n(M) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(N) + \operatorname{sign}(\det(N))s_n(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} s_i(M) + \operatorname{sign}(\det(M))s_n(M) \tag{6}$$

Démonstration. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_G(M) \neq \varnothing$, il existe $P \in G$ tel que $P \cdot M \in \mathcal{F}$. De même il existe $Q \in G$ tel que $Q \cdot N \in \mathcal{F}$.
En appliquant le théorème précédent à $Q \cdot N$ et $P \cdot M$ on obtient $Q \cdot N \leq_G P \cdot M$ si et seulement si les deux inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(Q \cdot N) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(P \cdot M) \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(Q \cdot N) - s_n(Q \cdot N) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} s_i(P \cdot M) - s_n(P \cdot M)$$

Les deux membres de l'équivalence ne sont pas tout à fait ceux que l'on voudrait. On applique dans celui de gauche le lemme précédent. Ainsi $N \leqslant_G M$ si et seulement si $Q \cdot N \leqslant_G P \cdot M$.
Pour le membre de droite, comme les valeurs singulières d'une matrice sont uniques $P \cdot M$ et M ont les mêmes valeurs singulières. En particulier, $s_i(M) = s_i(P \cdot M)$ et $s_i(N) = s_i(Q \cdot N)$. Ce qui termine la preuve. □

2 Enveloppe convexe de $SO_n(\mathbb{R})$

Théorème 16. *L'enveloppe convexe de l'orbite des matrices M de valeurs singulières $s_1(M) \geqslant \cdots \geqslant s_n(M)$ et de déterminant positif sous l'action de $G = SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices N de valeurs singulières $s_1(N) \geqslant \cdots \geqslant s_n(N)$ vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(N) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(M) \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(N) - \operatorname{sign}(\det(N)) s_n(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} s_i(M) - s_n(M)$$

Démonstration. La deuxième inégalité est triviale. C'est une application directe de la deuxième inégalité du théorème précédent (puisque $\det(M) > 0$).

La première inégalité est clairement évidente jusqu'à l'indice $n-2$ d'après la première inégalité du théorème précédent. Montrons qu'elle est vraie jusqu'à l'indice n.

• Si $\det(N) > 0$: la troisième inégalité du théorème précédent nous donne l'inégalité au rang n.
Pour le rang $n-1$, la deuxième et la troisième inégalité se réécrivent

$$\begin{aligned} s_1(N) + \cdots + s_{n-1}(N) - s_n(N) &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) - s_n(M) \\ s_1(N) + \cdots + s_{n-1}(N) + s_n(N) &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) + s_n(M) \end{aligned}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient l'inégalité au rang $n-1$.

• Si $\det(N) < 0$: la deuxième et la troisième inégalité se réécrivent

$$\begin{aligned} s_1(N) + \cdots + s_{n-1}(N) + s_n(N) &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) - s_n(M) \\ s_1(N) + \cdots + s_{n-1}(N) - s_n(N) &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) + s_n(M) \end{aligned}$$

Comme précédemment, en sommant ces deux inégalités, on obtient l'inégalité au rang $n-1$.
Par suite, comme $s_n(M)$ est une valeur singulière, $s_n(M) \geqslant 0$, et par conséquent $-s_n(M) \leqslant s_n(M)$, et ainsi

$$\begin{aligned} s_1(N) + \cdots + s_{n-1}(N) + s_n(N) &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) - s_n(M) \\ &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) + s_n(M) \end{aligned}$$

• Si $\det(N) = 0$: la deuxième inégalité nous donne (et comme $s_n(M) \geqslant 0$) :

$$\begin{aligned} s_1(N) + \cdots + s_{n-1}(N) &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) - s_n(M) \\ &\leqslant s_1(M) + \cdots + s_{n-1}(M) \end{aligned}$$

L'inégalité est démontré à l'indice $n-1$.
Pour le rang n, il faut remarquer que nécessairement $s_n(N)=0$. En effet, si $N=PDQ^T$ est la décomposition en valeurs singulières de N, on a :

$$0 = |\det(N)| = |\det(PDQ^T)| = |\det(P)||\det(D)||\det(Q^T)| = \prod_{i=1}^{n} s_i(N)$$

Puisque $s_1(N) \geqslant \cdots \geqslant s_n(N) \geqslant 0$, nécessairement $s_n(N)=0$. Par suite,

$$\begin{aligned} s_1(N)+\cdots+s_{n-1}(N)+s_n(N) &= s_1(N)+\cdots+s_{n-1}(N) \\ &\leqslant s_1(M)+\cdots+s_{n-1}(M) \\ &\leqslant s_1(M)+\cdots+s_{n-1}(M)+s_n(M) \end{aligned}$$

□

Corollaire 17. *L'enveloppe convexe de $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs singulières $s_1(M) \geqslant \cdots \geqslant s_n(M)$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} s_1(M) &\leqslant 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i(M) - \mathrm{sign}(\det(N))s_n(M) &\leqslant n-2 \end{aligned}$$

Démonstration. En écrivant explicitement l'enveloppe convexe de l'orbite de l'action du théorème précédent, on a

$$\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_G(M)) = \mathrm{Conv}(\{PMQ^T \mid (P,Q) \in (SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R}))\})$$

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs singulières $s_1(M) \geqslant \cdots \geqslant s_n(M)$ et de déterminant positif.
Par suite, en prenant $M = I_n$, on a incontestablement $s_1(I) = \cdots = s_n(I) = 1$, et on obtient

$$\mathrm{Conv}(\{PQ^T \mid (P,Q) \in (SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R}))\}) = \mathrm{Conv}(SO_n(\mathbb{R}))$$

□

Remarque 18. *En fait, on a même $s_1(M)+\cdots+s_i(M) \leqslant i$, pour $i=1,\ldots,n$.*

Références

[$MT94$] : H.F. Miranda and R. C. Thompson, *Group majorization, the convex hulls of sets of matrices, and the diagonal element-singular value inequalities*, (1994).
[$MT93$] : H.F. Miranda and R. C. Thompson, *A trace inequality with a subtracted term, Linear Algebra Appl.*, 185 :165-172 (1993).
[$MT96$] : H.F. Miranda and R. C. Thompson, *A supplement to the von Neumann trace inequality for singular values*, 185 :165-172 (1996).
[$MLE87$] : M.L. Eaton, *Lectures on topics in probability inequalities*, Centrum Voor Wiskunde En Informatica (Amsterdam - 1987) pp 17-18, 154-165.
[$SPW14$] J. Saunderson, P. A. Parrilo , And A. S. Willsky, *Semidefinite descriptions of the convex hull of rotation matrices*, SIAM (2014)
[$MOA11$] A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities : Theory of majorization and its applications*, Springer (2011)
[$VIZ14$] C. Vinzant, *What is a spectrahedron ?* Notices of the American Mathematical Society (2014) pp. 492 - 494.
[$SZP09$] : A. Szpirglas, *Mathématiques L3 : Algèbre*, Pearson (2009).
[$AMO08$] : L. et J-P. Dedieu, *Analyse numérique matricielle*, Dunod (2008)