

Cours de mathématiques
Partie II – Analyse
MPSI 4

Alain TROESCH

Version du:

24 janvier 2021

Table des matières

8	Dérivation de fonctions	5
I	Rappels sur les limites	6
I.1	Limites : point de vue métrique	6
I.2	Limites : point de vue topologique	8
I.3	Unicité de la limite	10
I.4	Limites à droite et à gauche	10
I.5	Propriétés des limites	11
I.6	Limites de fonctions à valeurs dans \mathbb{C}	12
I.7	Continuité	13
II	Dérivation	13
II.1	Dérivation et tangente	14
II.2	Dérivées à droite et à gauche	15
II.3	Fonctions de classe \mathcal{C}^n	16
II.4	Théorèmes de prolongement	17
II.5	Règles de dérivation	18
II.6	Stabilité des propriétés de régularité	21
II.7	Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{C}	23
III	Étude d'une fonction	25
III.1	Graphe	25
III.2	Symétries d'une fonction	25
III.3	Monotonie	27
III.4	Variations des fonctions, extremum	28
III.5	Comportement asymptotique	28
III.6	Convexité	29
IV	Propriétés des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle	31
9	Les fonctions usuelles	33
I	Exponentielle, logarithme, puissances	33
I.1	Logarithme	33
I.2	Exponentielle	34
I.3	Fonctions puissances	35
I.4	Croissances comparées	37
II	Fonctions trigonométriques	37
II.1	Sinus	37
II.2	Cosinus	38

II.3	Tangente	39
III	Réciproques des fonctions trigonométriques	39
III.1	Arctangente	39
III.2	Arcsinus	41
III.3	Arccosinus	42
IV	Fonctions hyperboliques	43
V	Réciproques des fonctions hyperboliques (HP)	46
VI	Tableau des dérivées des fonctions usuelles	46
10	Calcul intégral	49
I	Calcul intégral et primitivation	49
I.1	Résultats issus de la théorie	49
I.2	Primitivations composées	52
II	Techniques de calcul intégral	54
II.1	Intégration par parties	54
II.2	Changements de variables	57
II.3	Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes	58
II.4	Conséquences pour les fonctions admettant des symétries	58
III	Rapide introduction aux intégrales impropres	59
11	Équations différentielles linéaires	61
I	Équations différentielles linéaires	61
II	Équations différentielles linéaires d'ordre 1	62
II.1	Situation	62
II.2	Solutions de l'équation homogène	62
II.3	Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$	63
II.4	Problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre	64
II.5	Problèmes de raccordement (ou recollement)	64
II.6	Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants	64
III	Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants	65
III.1	Position du problème	65
III.2	Résolution de l'équation homogène	65
III.3	Problème de Cauchy	67
III.4	Solution générale du système non homogène	67
12	Suites numériques	69
I	Convergence de suites	69
I.1	Un peu d'histoire	69
I.2	Définition de la limite d'une suite	70
I.3	Cas des suites complexes et vectorielles	72
I.4	Premières propriétés des suites convergentes	73
I.5	Suites de Cauchy (hors-programme)	73
II	Propriétés des suites liées à la convergence	75
II.1	Préambule : caractérisation séquentielle de la limite	75
II.2	Opérations sur les limites	76
II.3	Limites et inégalités	78
II.4	Suites monotones	80
II.5	Suites adjacentes	81
III	Suites extraites	82
III.1	Définitions	82
III.2	Suites extraites et convergence	83
III.3	Théorème de Bolzano-Weierstrass	86

III.4	Digression sur la construction de \mathbb{R}	87
III.5	Caractérisations séquentielles	87
IV	Étude de suites d'un type particulier	88
IV.1	Suites définies par une récurrence affine	89
IV.2	Suites définies par une relation linéaire d'ordre k	90
IV.3	Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$	93
13	Calcul asymptotique	97
I	Domination, négligeabilité	97
I.1	Cas des suites	97
I.2	Propriétés des o et O	99
I.3	Extension au cas des fonctions	101
II	Équivalents	102
II.1	Cas des suites	102
II.2	Propriétés des équivalents	103
II.3	Cas des fonctions	104
II.4	Équivalents classiques	105
II.5	Problème de la somme et de la composition des équivalents	105
14	Approximations polynomiales	107
I	Formules de Taylor	107
I.1	Développement de Taylor	107
I.2	Formule de Taylor avec reste intégral (ou reste de Laplace)	109
I.3	Formule de Taylor-Lagrange	109
I.4	Formule de Taylor-Young	110
II	Formules de Taylor pour les fonctions usuelles	111
II.1	Exponentielle	111
II.2	Logarithme	111
II.3	Fonctions trigonométriques	112
II.4	Fonctions hyperboliques	113
II.5	Fonctions puissances	114
II.6	Polynômes	115
III	Généralités sur les développements limités	115
III.1	Définition, exemples	115
III.2	Restriction	117
III.3	Forme normalisée et partie principale	117
IV	Opérations sur les développements limités	119
IV.1	Somme de DL	119
IV.2	Produit de DL	119
IV.3	Composition de DL	120
IV.4	Quotient de DL	121
IV.5	Primitivation d'un DL	122
IV.6	Dérivation	123
V	Développements asymptotiques	123
VI	Applications	126
VI.1	Courbes polynomiales asymptotes à une courbe	126
VI.2	Extréma	126
VII	Développements limités des fonctions usuelles	127

15	Séries numériques	129
I	Notion de série et de convergence	129
I.1	Définitions	129
I.2	Propriétés liées à la convergence	131
II	Séries à termes positifs	132
II.1	Comparaisons entre séries à termes positifs	132
II.2	Convergence absolue et semi-convergence	133
II.3	D'autres théorèmes de comparaison	134
II.4	Comparaison entre une série et une intégrale	135
II.5	Séries de référence	135
II.6	Comparaison avec une série de Riemann	137
II.7	Comparaison avec une série géométrique	137
III	Étude de la semi-convergence	138
III.1	Séries alternées	138
III.2	Critère d'Abel	138
IV	Calcul de sommes	139
IV.1	Séries exponentielles et logarithmiques	139
IV.2	Séries géométriques	140
V	Familles sommables	141
V.1	Problèmes de commutativité	141
V.2	Familles sommables	142
V.3	Associativité et théorème de Fubini	144
16	Propriétés des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle	147
I	Fonctions continues sur un intervalle	147
I.1	Fonctions continues et continues par morceaux	147
I.2	Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)	148
I.3	Continuité uniforme	149
I.4	Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné	150
I.5	Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection	150
II	Fonctions dérivables sur un intervalle	152
II.1	Théorème de Rolle	152
II.2	Théorème des accroissements finis	153
II.3	Variations des fonctions dérivables	155
II.4	Limites de dérivées et prolongements de fonctions dérivables	155
III	Dérivabilités de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}	156
17	Intégration	159
I	Intégrale des fonctions en escalier	160
I.1	Notion de subdivision d'un intervalle	160
I.2	Fonctions en escalier	160
I.3	Intégrale d'une fonction en escalier	162
I.4	Propriétés des intégrales de fonctions en escalier	163
II	Construction de l'intégrale de Riemann	164
II.1	Fonctions intégrables	164
II.2	Exemples importants de fonctions intégrables	166
II.3	Propriétés de l'intégrale	167
II.4	Intégrales des fonctions continues par morceaux	168
II.5	Sommes de Riemann	169
II.6	Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C}	169
III	Primitives et intégration	170

Dérivation de fonctions

Il faut entendre par dernier quotient des quantités évanouissantes le quotient qu'ont entre elles ces quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies, mais au moment même où elles s'évanouissent.

(Isaac Newton)

Il faut donc « savoir calculer » avant que de prétendre accéder à l'Analyse moderne.

(Jean Dieudonné)

Introduction

Note Historique 8.0.1

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences ; d'ailleurs, la séparation des différentes sciences est tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingénierie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini)

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre nous donnons les outils permettant une étude efficace des fonctions. L'outil essentiel est bien entendu la dérivation, que nous abordons ici d'un point de vue essentiellement pratique : l'objectif est de savoir dériver et étudier de façon efficace des fonctions explicites.

Nous commencerons par quelques rappels sur les limites, limites à gauche et limites à droite. Nous supposerons connues les différentes opérations classiques sur les limites, que nous établirons rigoureusement plus tard : somme, produit, quotient.

Nous profitons également de ce chapitre pour introduire des notations et du vocabulaire adapté à l'étude de la dérivabilité, et pour exposer sans démonstration quelques propriétés importantes des fonctions continues et/ou dérivables, afin de disposer d'une boîte à outil assez complète pour pouvoir développer par la suite des exemples intéressants sans avoir à attendre d'avoir le bagage nécessaire à la démonstration de ces résultats.

I Rappels sur les limites

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble X de \mathbb{R} . On supposera que X est un intervalle, ou une union finie d'intervalles, et on notera \overline{X} l'intervalle (ou union d'intervalles) fermé correspondant dans \mathbb{R} (en incluant les bornes). On étudie la limite de f en un point a de \overline{X} , c'est-à-dire en un point de son domaine ou une borne.

Remarque 8.1.1

Plus généralement, si X est un sous-ensemble quelconque de \mathbb{R} , on peut considérer la limite en un point a de l'adhérence \overline{X} de X , défini comme étant le plus petit fermé contenant X , ou de façon équivalent, l'ensemble des points x pouvant être approchés d'aussi près qu'on veut par des points de X (i.e. tout voisinage de x rencontre X).

Lorsque $a \in \overline{X}$, on dira que a est adhérent à X .

I.1 Limites : point de vue métrique

Définition 8.1.2 (Limites en un point fini)

Soit $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$.

- Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a (ou bien f admet b comme limite en a) si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq A.$$

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

- $\forall \varepsilon > 0$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... »
- $\exists \eta > 0$: « ... il existe une petite boule de rayon η centrée en a , quitte à prendre η très petit ... »
- $\forall x \in X, |x - a| < \eta \implies \dots$: « ... tel que si x est à la fois dans X et dans cette boule ... »
- $\dots \implies |f(x) - b| < \varepsilon$: « alors $f(x)$ est proche à ε près de b . »

Autrement dit : « Si $x \in X$ est suffisamment proche de a , alors $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de b . »

Remarques 8.1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{X}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a . On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{X}$.
2. Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.
3. De même, dans le cas d'une limite $+\infty$, la définition trouve sa pertinence lorsque A devient grand (vers $+\infty$) et dans le cas d'une limite $-\infty$, lorsque A devient petit (vers $-\infty$).

Proposition 8.1.4

On peut remplacer une ou plusieurs des inégalités larges $|x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - b| \leq \varepsilon$ par des inégalités strictes, cela donne une définition équivalente

◁ **Éléments de preuve.**

Le quantificateur universel sur ε nous assure que l'on peut aussi remplacer ε par $\varepsilon/2$. On déduit alors l'équivalence de la chaîne d'inclusions :

$$\overline{B}(b, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(b, \varepsilon) \subset \overline{B}(b, \varepsilon)$$

et des inclusions similaires avec a et $\frac{\eta}{2}$ (il sera alors peut-être nécessaire de considérer comme valeur de sortie $\frac{\eta}{2}$ et non η , ce qui nous donne aussi la validité de notre quantification existentielle). ▷

Proposition 8.1.5 (Limite en un point du domaine)

Si $a \in X$, et si $f(x)$ admet une limite en a , alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Soit ℓ est la limite de f en a . Puisque a vérifie toujours $|a - a| \leq \eta$, on doit avoir, pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(a) - \ell| \leq \varepsilon$. ▷

La définition ci-dessus se généralise à tout espace métrique :

Définition 8.1.6

Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, et $X \subset E$. Soit $f : X \rightarrow F$. Comme dans le cas de \mathbb{R} , on peut considérer l'adhérence \overline{X} de X dans E . Soit $a \in \overline{X}$, et $b \in F$. On dit que f admet une limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \eta \implies d'(f(x), b) < \varepsilon.$$

Les propriétés ci-dessus (gestion des inégalités strictes ou larges, limites en un point du domaine) sont également valables dans ce cadre.

Le cas spécifique de \mathbb{R} correspond à cette définition plus générale, pour la distance définie par $d(x, y) = |y - x|$.

Dans le cas de \mathbb{R} , on peut également définir des limites en des points infinis, ou des limites de valeur infinie, débordant ainsi un peu du cadre métrique. La longueur de ces définitions est due au nombre de cas à étudier. Dans toutes ces définitions également, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes. La seule inégalité qu'on n'a pas le droit de modifier est $\varepsilon > 0$.

Définition 8.1.7 (Limite en $+\infty$)

On suppose que $+\infty$ est adhérent à X (i.e. X est non majoré).

- Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq B \implies f(x) \leq A.$$

Définition 8.1.8 (Limite en $-\infty$)

On suppose que $-\infty$ est adhérent à X .

- Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq B \implies f(x) \geq A.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq B \implies f(x) \leq A.$$

Remarque 8.1.9

1. Lorsqu'on prend $X = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on trouve la définition de la limite des suites qui n'est qu'un cas particulier de la définition générale :

- $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$
- $u_n \rightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$

2. Comme plus haut, les inégalités (sauf $\varepsilon > 0$) peuvent être indifféremment strictes ou larges.

Comme on peut le constater, la distinction entre un point fini et les deux infinis, à faire à la source et à l'arrivée, amène à distinguer 9 cas différents dans la définition des limites. Pour les études pratiques, ce n'est pas gênant : il suffit de considérer le cas qui nous concerne. Pour des études plus théorique, notamment pour établir des propriétés générales, il peut être plus commode d'avoir une description plus uniforme, évitant d'avoir à distinguer entre un grand nombre de cas.

I.2 Limites : point de vue topologique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. On rappelle que si E est un espace métrique, un sous-ensemble V de E est un voisinage de $b \in E$ si et seulement s'il existe un rayon $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(b, \varepsilon)$ soit entièrement incluse dans V .

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut aussi disposer de la notion voisinage de $+\infty$:

Définition 8.1.10 (Voisinage de $+\infty$)

On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset V$.

Notation 8.1.11

Pour $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}(b)$ l'ensemble des voisinages de b .

Remarque 8.1.12 (Voisinage dans un espace topologique)

Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'un sous-ensemble non vide \mathcal{O} de $\mathcal{P}(E)$ dont les objets sont par définition les ouverts de E . On impose de plus la stabilité par union quelconque et par intersection finie. Par exemple, l'ensemble des ouverts d'un espace métrique tel que défini précédemment vérifie cette propriété et définit donc une topologie.

On dit dans ce contexte général que V est un voisinage de b s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$. Vous pouvez facilement vérifier que la définition ci-dessus de voisinage donnée dans le cadre métrique correspond bien à cette définition plus générale.

La caractérisation de la continuité qu'on obtient ci-dessous permet alors de donner une définition de la continuité dans le cadre d'espaces topologiques, non nécessairement munis d'une métrique.

La notion de limite relie la métrique de l'espace de départ (lorsqu'on considère x tel que $|x - a| < \eta$) et la métrique de l'espace d'arrivée (lorsqu'on impose $|f(x) - \ell| < \varepsilon$). On peut remplacer l'un ou l'autre, ou les deux, de ces deux points de vue métriques par un point de vue topologique :

On obtient alors une définition équivalente de la limite d'une fonction en un point :

Théorème 8.1.13 (Caractérisation des limites par voisinages)

Soit $a \in \overline{X}$ (fini ou infini) et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) (métrique/métrique) f admet une limite b lorsque x tend vers a
- (ii) (métrique/topologique)
 1. si a est fini : $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies f(x) \in V$
 2. si $a = +\infty$: $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists A > 0, \forall x \in X, x > A \implies f(x) \in V$
- (iii) (topologique/métrique)
 1. si b est fini : $\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X, x \in U \implies |f(x) - b| < \varepsilon$
 2. si $b = +\infty$: $\forall A > 0, \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in X, x \in U \implies f(x) > A$
- (iv) (topologique/topologique) $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap X) \subset V$.

Ici, comme plus haut, les inégalités sont indifféremment strictes ou larges, à part $\varepsilon > 0$ (le cas d'égalité serait trop contraignant).

◁ **Éléments de preuve.**

Remarquer que $|x - a| < \varepsilon$ équivaut à $x \in B(a, \varepsilon)$

Au départ, on passe alors du cas topologique au cas métrique en remarquant que tout voisinage de a contient une boule $B(a, \varepsilon)$, et du cas métrique au cas topologique en remarquant qu'une boule $B(a, \varepsilon)$ est un voisinage de a . Quelle différence à l'arrivée? ▷

Remarque 8.1.14

Cette caractérisation est aussi valable dans le cadre plus général d'un espace métrique (et s'énonce un peu plus simplement, puisqu'on n'a pas à y considérer les cas infinis).

Nous dirons qu'une fonction f admet une propriété \mathcal{P} au voisinage d'un point $a \in \overline{X}$, s'il existe un voisinage V de a dans \mathbb{R} (au sens étendu ci-dessus pour a infini) tel que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée par f sur l'ensemble $V \cap X$.

La notion de limite permet alors de « contrôler » une fonction au voisinage d'un point. Ainsi, on obtient par exemple :

Proposition 8.1.15

Soit f une fonction admettant une limite finie en un point a de \overline{X} . Alors, f est bornée au voisinage de a .

◁ **Éléments de preuve.**

La définition de la limite par ε donne un encadrement local de f . Comment s'arranger pour ne pas avoir besoin de distinguer les cas de limites en un point fini ou en un point infini? ▷

Définition 8.1.16 (Coïncidence de deux fonctions)

Soit f et g deux fonctions définies sur X et Y et a tel que $a \in \overline{X}$ et $a \in \overline{Y}$. On dit que f et g coïncident au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a dans \mathbb{R} tel que $X \cap V = Y \cap V$ et que

$$\forall x \in X \cap V, f(x) = g(x).$$

Proposition 8.1.17 (Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au vois. de a)

Soit f et g deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point a . Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a , alors g aussi, et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par voisinage pour ne pas avoir de discussion, en remarquant que si V_0 est un voisinage de a sur lequel f et g coïncide, alors pour tout voisinage U de a , $U \cap V_0$ est un voisinage de a , sur lequel f et g coïncident. ▷

I.3 Unicité de la limite

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de \mathbb{R} :

Lemme 8.1.18 (Lemme de séparation)

Soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$ tels que $x \neq y$. Alors il existe des voisinages U de x et V de y tels que $U \cap V = \emptyset$. Si de plus $x < y$, on peut choisir U et V tels que $U < V$ (dans le sens où pour tout $u \in U$ et tout $v \in V$, $u < v$).

◁ **Éléments de preuve.**

Il suffit de montrer directement la seconde assertion. Dans le cas x et y réels, considérer $B(x, \frac{d}{3})$ et $B(y, \frac{d}{3})$, où d est Adapter dans le cas d'un ou deux infinis. ▷

Théorème 8.1.19 (Unicité de la limite, cas réel)

Soit $a \in \overline{X}$ et f une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'absurde, en considérant $\ell < \ell'$ deux limites, et en utilisant la définition topologique avec deux voisinages bien choisis, l'un de ℓ et l'autre de ℓ' . ▷

Notation 8.1.20

En cas d'existence de la limite en a , cette notation étant maintenant non ambiguë, on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a .

I.4 Limites à droite et à gauche**Notation 8.1.21**

Soit f définie sur X . Soit Y un intervalle (ou une union d'intervalles, ou plus généralement un sous-ensemble quelconque) tel que $a \in \overline{X \cap Y}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f|_{X \cap Y}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_{X \cap Y}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Y}} f(x).$$

Dans cette notation, il est sous-entendu que x doit bien sûr aussi être élément du domaine de définition X de f .

Définition 8.1.22 (Limite à gauche, limite à droite)

- La limite à gauche correspond au cas où $Y =]-\infty, a[$; on utilise l'une des notations suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]-\infty, a[}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a - 0).$$

- La limite à droite correspond au cas où $Y =]a, +\infty[$; on utilise l'une des notations suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]a, +\infty[}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a + 0).$$

Remarque 8.1.23

Remarquez que le point a est exclus de Y .

Exemples 8.1.24

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$;
3. $f : x \mapsto [x]$ en $a \in \mathbb{Z}$.

De même que plus haut, on peut dire que la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Y}} f(x)$ est envisageable ou non suivant que x est dans $\overline{X \cap Y}$. On dira que la limite de f en a sur Y est envisageable. Par abus, on dira également que $f(a)$ est envisageable si f est définie en a . Cela correspond au cas particulier où $Y = \{a\}$.

Proposition 8.1.25

Soit $a \in \overline{X}$. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de sous-ensembles de \mathbb{R} tels que $X \subset \bigcup_{i \in I} Z_i$.

La fonction f admet au point a une limite ℓ (finie ou infinie) si et seulement si pour tout i tel que la limite de f en a sur Z_i est envisageable, cette limite existe, et vaut ℓ .

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct facile. Réciproque : commencer par se ramener au cas où la limite est envisageable sur tous les Z_i , par restriction à un voisinage bien choisi. Considérer ensuite V un voisinage de ℓ et des U_i voisinages de a associés à chaque Z_i . Comment trouver un voisinage de U permettant de contrôler f sur tout X ? ▷

Corollaire 8.1.26 (Caractérisation de la limite par limites à gauche et à droite)

Soit $a \in \overline{X}$. La fonction f admet une limite ℓ en a si et seulement si, parmi les quantités $f(a - 0)$, $f(a)$ et $f(a + 0)$, celles qui sont envisageables existent et sont égales à ℓ .

I.5 Propriétés des limites

Pour la suite du chapitre, on supposera connues les propriétés suivantes des limites. Ces propriétés seront démontrées ultérieurement :

- Les limites de sommes, produits, quotients, composées, et les formes indéterminées $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .
- La conservation des inégalités LARGES par passage à la limite.

- Le théorème d'encadrement, ou théorème des gendarmes, aussi appelé plus complètement théorème d'existence de la limite par encadrement, ce qui dit bien quel est le point essentiel de ce théorème. À ces propriétés, on en rajoute une qu'on démontre tout de suite :

Proposition 8.1.27 (Composition des limites)

Soit f et g deux fonctions et a, b et c des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, alors $g \circ f$ admet une limite en a , et

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat par caractérisation topologique. ▷

I.6 Limites de fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

On considère dans ce paragraphe une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, où X est un sous-ensemble de \mathbb{R} (la variable est donc réelle ici), et $a \in \overline{X}$.

La définition métrique de la limite étant en fait valable en remplaçant les distances $|x - y|$ dans \mathbb{R} par des distances plus générales $d(x, y)$ dans un espace métrique, on peut définir sans problème de la façon suivante la limite de f à valeurs dans \mathbb{C} , la distance étant définie par le module de la différence. On pourrait même envisager le cas où la variable elle-même est complexe.

Définition 8.1.28 (Limite d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C})

Si a est fini, f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Vous adaptez bien sûr facilement cette définition au cas où a est infini, ou bien de façon synthétique à l'aide du point de vue topologique à la source.

Le point important est le suivant, affirmant que l'étude des limites d'une fonction à valeurs complexes se ramène à l'étude des limites de deux fonctions à valeurs réelles.

Théorème 8.1.29 (Caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_r + i f_i$, où f_r et f_i sont à valeurs réelles (donc correspondent à la partie réelle et à la partie imaginaire de f). Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si f_r et f_i admettent des limites en a , vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow a} f_r(x) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \operatorname{Im}(\ell)$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dans un sens, utiliser les majorations $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ et le théorème d'encadrement.

Dans l'autre, utiliser l'inégalité triangulaire pour obtenir $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$. ▷

Les règles principales sur le calcul des limites de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} sont les mêmes que dans \mathbb{R} (sommes, produits, quotients etc.). Elles peuvent s'en déduire en décomposant toutes les fonctions en $f_r + i f_i$, en développant (pour le produit) ou en multipliant par la quantité conjuguée (pour l'inverse) pour se ramener aux règles concernant les fonctions réelles. On peut aussi les redémontrer par ε (en gardant un voisinage au départ, pour éviter les disjonctions de cas).

On en déduit de façon immédiate :

Corollaire 8.1.30 (unicité de la limite, cas complexe)

Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{C} . La limite de f en a , si elle existe, est unique.

◁ **Éléments de preuve.**

Par unicité de la limite de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. On aurait aussi pu le faire en adaptant le lemme de séparation dans le cas complexe : si $|y - x| < \varepsilon$, les boules de centre ℓ et ℓ' et de rayon $\frac{\varepsilon}{3}$ sont des voisinages de ℓ et ℓ' et sont disjoints. ▷

I.7 Continuité

On rappelle la définition suivante :

Définition 8.1.31 (Continuité)

Soit f définie sur X et $a \in X$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a .

Remarque 8.1.32

Le point a est dans le domaine. Ainsi, si f est continue en a , la limite en a est nécessairement $f(a)$.

De façon équivalente :

Proposition 8.1.33 (Propositions équivalentes à la continuité)

Soit $a \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue en a
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;
- (iii) pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap X) \subset V$.

◁ **Éléments de preuve.**

Équivalences déjà vues dans le cadre des limites. Le seul ingrédient supplémentaire est l'égalité de la limite avec $f(a)$, ce qui, comme on l'a vu, est toujours le cas lorsque a est dans le domaine de f . ▷

Proposition 8.1.34 (Restriction de l'ensemble source)

Si f et g coïncide sur un voisinage de a , f est continue en a si et seulement si g est continue en a .

◁ **Éléments de preuve.**

On a déjà vu dans cette situation l'équivalence de existence des limites, et leur égalité. ▷

Les opérations sur les limites ont pour corollaire immédiat les opérations similaires sur les fonctions continues (sommes, produits, quotients, compositions). En particulier, les fonctions polynomiales sont continues, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine.

II Dérivation

Une fonction peut être plus ou moins « régulière ». La régularité d'une fonction se mesure à l'aide des propriétés de continuité et de dérivabilité. Plus on peut dériver une fonction, plus celle-ci sera régulière. Intuitivement, plus une fonction est régulière, plus son graphe est lisse.

II.1 Dérivation et tangente

Dans ce paragraphe, les fonctions étudiées seront systématiquement des fonctions définies sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

Définition 8.2.1 (dérivabilité, dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite finie en x_0 . Dans ce cas, on définit la dérivée par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarques 8.2.2

1. La dérivation est une notion *locale* et *non ponctuelle* (f doit être défini sur un voisinage de x_0).
2. La dérivation est une notion *locale* et *non globale* (ne dépend que de la description de f sur un voisinage de x_0 , quel qu'il soit, et non de sa description globale).

Exemples 8.2.3

1. $f : x \mapsto c$ la fonction constante.
2. $f : x \mapsto x$ la fonction identité.
3. $f : x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Tout comme nous avons traduit la continuité sous forme d'un développement limité à l'ordre 0 (c'est-à-dire sous forme d'une approximation polynomiale à $o(1)$ près), on peut traduire la dérivabilité sous forme d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 (c'est-à-dire une approximation polynomiale à $o(x - x_0)$ près).

Remarque 8.2.4

Interprétation géométrique : la dérivée en x_0 est la pente de la tangente à la courbe de f en x_0 . La tangente est obtenue comme limite, au sens géométrique, des cordes entre le point de la courbe d'abscisse x_0 et un point d'abscisse x , tendant vers x_0 .

Définition 8.2.5 (Tangente)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Alors la tangente à la courbe de f en x_0 est la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Proposition 8.2.6

La tangente est la droite approchant « au mieux » la courbe de f au voisinage de x_0 .

◁ Éléments de preuve.

Voir DL.

▷

Théorème 8.2.7 (Continuité des fonctions dérivables)

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 . **La réciproque est fautive !**

◁ Éléments de preuve.

Immédiat en écrivant $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$. ▷

Définition 8.2.8 (Dérivabilité sur un intervalle)

Soit J un intervalle non nécessairement ouvert, tel que $J \subset I$. On dit que f est *dérivable* sur J si f est dérivable en tout point de J .

Avertissement 8.2.9

Attention, il n'est pas équivalent de dire que f est dérivable sur J et que la restriction de f est dérivable sur J . Ainsi, par exemple, si $I = [0, 2]$ et $J = [0, 1]$, la dérivabilité de f sur J stipule la dérivabilité de f en 1 (donc la dérivabilité à la fois à gauche et à droite), alors que la dérivabilité de la restriction de f à $[0, 1]$ n'impose que la dérivabilité à gauche en 1. Remarquez que les problèmes ont toujours lieu en des bornes fermées de J , qui ne sont pas des bornes de I . Ainsi, on pourrait contourner le problème en se restreignant à la dérivabilité sur des intervalles du type $I \cap U$, où U est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Note Historique 8.2.10

- La notion de dérivée tire son origine dans l'étude des tangentes, et en particulier de la pente des tangentes. Pierre de Fermat le premier (en 1636) constate que très souvent, la pente s'obtient en écrivant $\frac{f(a+e) - f(a)}{e}$, puis en « prenant » $e = 0$ (il ne dispose pas encore de la notion de limite). Il appelle e un « infiniment petit ».
- Newton, en 1669, introduit la notation $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, pour les dérivées des coordonnées d'un point, qu'il appelle « fluxions » des « fluentes » (x, y, z) , qu'il définit comme les vitesses dont les fluentes sont augmentées graduellement et indéfiniment. Sa notation est encore utilisée actuellement en physique.
- En 1674, Leibniz introduit la notation dx pour désigner une variation infinitésimale sur l'abscisse, et dy pour désigner une variation infinitésimale sur l'ordonnée. Si y dépend de x , $\frac{dy}{dx}$ désigne donc la variation infinitésimale de la fonction y rapportée à la variation infinitésimale de x qui l'a provoquée : il s'agit bel et bien de la définition de Fermat, et rien de plus : pas de nouvelle théorie, juste une nouvelle notation, encore largement utilisée aujourd'hui, notamment sous la forme non quotientée (pensez aux intégrales !)
- À la fin du 18-ième siècle, Joseph-Louis Lagrange introduit la terminologie « dérivée » et la notation f' .
- La formalisation rigoureuse est due à Karl Weierstrass dans la deuxième moitié du 19-ième siècle, s'appuyant sur une définition rigoureuse de la notion de limite et de continuité (dont il donne également pour la première fois une définition rigoureuse et précise)

II.2 Dérivées à droite et à gauche

On note I le domaine de définition de f

Définition 8.2.11 (Dérivées à droite et à gauche)

Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si l'expression $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à droite lorsque x tend vers x_0 . On note alors :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De même pour la dérivée à gauche : en cas d'existence,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Évidemment, la première condition pour que la dérivée à droite existe est que cette limite ait un sens, donc que x_0 ne soit pas la borne supérieure de I .

Remarque 8.2.12

La dérivabilité à droite en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 de la restriction de f à $I \cap [x_0, +\infty[$.

Proposition 8.2.13 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_g et f'_d)

Soit $x_0 \in I$, non égal à une des bornes de I . Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 , et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

◁ Éléments de preuve.

Par caractérisation de la limite (du taux d'accroissement) par limites à droite et à gauche. ▷

Exemples 8.2.14

1. $x \mapsto |\sin(x)|$
2. $x \mapsto |x|^3$.

II.3 Fonctions de classe \mathcal{C}^n

Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle I , et dérivable sur cet intervalle I . La fonction dérivée f' est alors définie sur I . On peut alors étudier les propriétés de dérivabilité de f' , et, en cas de dérivabilité, on obtient la dérivée seconde f'' (dérivée de la dérivée). On peut continuer de la sorte tant que c'est possible.

Définition 8.2.15 (dérivées d'ordre supérieur)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que f est n -fois dérivable si on peut dériver f sur I , n fois de suite. Cela définit alors une fonction $f^{(n)}$.

Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence, basé sur la formule suivante, en tout point où c'est possible :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Remarques 8.2.16

- N'oubliez pas les parenthèses autour de l'exposant, pour bien distinguer la dérivation de l'exponentiation.
- Pour $n = 1$ et $n = 2$, on utilise généralement les notations f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. On rencontre aussi parfois f''' pour $f^{(3)}$ (« f tierce »). De plus, la notation $f^{(0)}$ désigne la fonction f elle-même.
- Pour pouvoir définir la dérivée n -ième de f en x_0 , il faut pouvoir dériver $f^{(n-1)}$ en x_0 , et il faut donc que $f^{(n-1)}$ soit définie sur tout un voisinage de x_0 et non seulement en x_0 .

Définition 8.2.17 (fonctions de classe \mathcal{C}^n)

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.

Ainsi, une fonction est de classe \mathcal{C}^0 si elle est continue. Elle est de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable (donc continue) et de dérivée continue, etc. Remarquez que la dérivabilité ne suffit pas à obtenir la classe \mathcal{C}^1 .

Exemple 8.2.18

$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0.

Notation 8.2.19 ($\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit I un intervalle et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et n fois dérivables sur I . On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I et de dérivée n -ième continue.

En particulier, $\mathcal{D}^0(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I , $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur I .

Proposition 8.2.20

On a une chaîne d'inclusions :

$$\dots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \mathcal{D}^{n-1}(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathcal{D}^0(I).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Une inclusion sur deux est évidente par définition, l'autre provient de la continuité d'une fonction dérivable. ▷

Définition 8.2.21 (Fonctions de classe \mathcal{C}^∞)

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si f est infiniment dérivable. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Il revient au même de dire que f est dans $\mathcal{D}^n(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4 Théorèmes de prolongement

On termine cette étude des fonctions de classe \mathcal{C}^n par des propriétés de prolongement, extrêmement utiles pour justifier la classe \mathcal{C}^n d'une fonction obtenue par prolongement en un point. Ces théorèmes de prolongement sont exprimés sur la borne gauche de l'intervalle. On pourrait bien entendu les adapter pour la borne droite.

Le premier résultat est élémentaire :

Théorème 8.2.22 (Prolongement par continuité)

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$, et admettant une limite ℓ en a . Il existe une unique fonction g continue sur $[a, b]$ et coïncidant avec f sur $]a, b]$. Elle vérifie $g(a) = \ell$. La fonction g est appelée prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

◁ **Éléments de preuve.**

Ce n'est rien d'autre que l'unicité de la limite. ▷

Le deuxième théorème généralise le précédent à des ordres de dérivation supérieurs. Sa démonstration nécessite des arguments qu'on développera plus tard.

Théorème 8.2.23 (Théorème de la classe \mathcal{C}^n par prolongement)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^n sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f peut être prolongée sur I en une fonction \tilde{f} de classe \mathcal{C}^n sur I . De plus, on aura alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le cas $n = 1$ (appelé théorème de la limite de la dérivée) est remis à plus tard (basé sur le théorème des accroissements finis). Le cas général s'en déduit par récurrence. ▷

II.5 Règles de dérivation

Il est important d'avoir une bonne maîtrise des règles de calcul suivantes, permettant de dériver toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles, à condition de connaître les dérivées de ces fonctions usuelles. Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Proposition 8.2.24 (dérivée d'une somme, d'un produit)

Soit f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} , et $x \in I$. Soit λ un réel.

1. Si f est dérivable en x , alors λf aussi et $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
2. Si f et g sont dérivables en x , alors $f + g$ aussi et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. Si f et g sont dérivables en x , fg aussi et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. Si g est dérivable en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ aussi et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
5. Si f et g sont dérivables en x et $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ aussi et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

◁ **Éléments de preuve.**

1 et 2 sont immédiats en formant le taux d'accroissement.

Pour 3, introduire artificiellement $f(x+h)g(x)$ pour exprimer le taux d'accroissement de fg à l'aide des taux d'accroissement de f et g . Utiliser la continuité de f .

Pour 4, former le taux d'accroissement et mettre sur le même dénominateur. Utiliser la continuité de g .

5 est la combinaison de 3 et 4. ▷

Exemples 8.2.25

- Dérivée de $x \mapsto x^2$
- Dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Corollaire 8.2.26 (dérivée d'un produit de n termes)

Soit $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f_1, \dots, f_n sont dérivables en x_0 , alors leur produit aussi, et :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^n f_k'(x_0) \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} f_i(x_0).$$

Si les $f_i(x_0)$ sont tous non nuls, ceci se réexprime sous la forme

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = \left(\prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} f_i \right) \sum_{i=1}^n \frac{f_i'(x_0)}{f_i(x_0)}$$

S'il existe i_0 tel que $f_{i_0}(x_0) = 0$, alors la plupart des termes s'annulent :

$$(f_1 \cdots f_n)'(x_0) = f_{i_0}'(x_0) \prod_{i \neq i_0} f_i(x_0).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence sur n à partir de la formule de dérivation d'un produit. ▷

Exemples 8.2.27

- Dérivée de $f : x \mapsto x^n$.
- Dérivée d'un polynôme.

On en déduit notamment le résultat suivant à bien maîtriser pour son utilité.

Proposition 8.2.28 (Dérivées successives des puissances)

Soit $f : x \mapsto x^n$, et $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k \leq n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.
- Si $k > n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = 0$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence. ▷

Proposition 8.2.29 (Dérivation d'une composition)

Soit I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. Si f est dérivable en x et g dérivable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x , et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y) = f'(x) \cdot g' \circ f(x).$$

Ainsi, $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Multiplier et diviser par $f(y) - f(x)$. Pour cela, distinguer suivant que $f'(x) = 0$ ou non. Dans le premier cas, couper I en deux ensembles, l'un sur lequel $f(y) - f(x)$ est toujours nul, l'autre sur lequel $f(y) - f(x)$ ne s'annule pas. Dans le deuxième cas, montrer qu'il existe un voisinage de x sur lequel $y \mapsto f(y) - f(x)$ ne s'annule qu'en x .

On peut éviter cette discussion avec des DL (voir un chapitre ultérieur). ▷

Un cas particulier important est le cas de la dérivée logarithmique

Proposition/Définition 8.2.30 (Dérivée logarithmique)

Soit f une fonction dérivable d'un intervalle I dans \mathbb{R}_+^* . Alors $\ln \circ f$ est dérivable, de dérivée :

$$(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$$

L'expression $\frac{f'}{f}$ s'appelle dérivée logarithmique de f .

Plus généralement, si f est dérivable et de signe constant sur un intervalle ou une union d'intervalles, et ne s'annule pas, alors

$$(\ln \circ |f|)' = \frac{f'}{f}.$$

Remarque 8.2.31

La dérivée de f s'exprime facilement à l'aide de f et de sa dérivée logarithmique. Ainsi, la dérivée logarithmique est une façon commode de calculer f' lorsque le passage au logarithme simplifie le problème. C'est le cas en particulier lorsqu'il y a des produits en jeu, puisque le logarithme va transformer les produits en sommes, plus simples à dériver. On peut remarquer d'ailleurs que dans le cas de fonctions positives, la règle de dérivation des produits de n terme peut s'obtenir facilement par dérivation logarithmique.

Dans le cas général, l'utilisation de la dérivée logarithmique nécessitera un contrôle systématique des signes.

La formule de dérivation d'une composée se généralise au cas d'un plus grand nombre de composée. Il s'agit du produit des dérivées de chacune des fonctions, évaluées au point image du point initial x_1 par les fonctions précédemment appliquées :

Proposition 8.2.32 (Dérivation d'une composition itérée)

Soit $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ des fonctions dérivables respectivement en x_1 , en $x_2 = f_1(x_1)$, en $x_3 = f_2(x_2) = f_2 \circ f_1(x_1)$, ..., en $x_n = f_{n-1}(x_{n-1}) = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_1)$. Alors $f_n \circ \dots \circ f_1$ est dérivable en x_1 et :

$$\begin{aligned} (f_n \circ \dots \circ f_1)'(x_1) &= f_n'(x_n) \dots f_1'(x_1) \\ &= \left[f_n' \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_1) \right] \times \left[f_{n-1}' \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(x_1) \right] \times \dots \times f_1'(x_1). \end{aligned}$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence immédiate

▷

Exemple 8.2.33

Exprimer la dérivée de $x \mapsto \ln(3 + \sin(x^3))$.

La dernière règle de dérivation que nous voyons est la règle de dérivation des fonctions réciproques. Nous admettons pour cela le lemme suivant :

Lemme 8.2.34 (continuité des réciproques, admis pour l'instant)

Soit I et J deux intervalles et soit f une application bijective continue de I dans J . Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J .

Ce lemme, à l'apparente évidence sous l'angle des graphes, nécessite quelques propriétés sur les fonctions continues sur tout un intervalle. Ces propriétés étant étudiées dans un chapitre ultérieur, nous démontrerons le lemme à cette occasion. Il s'agit en fait d'une des parties du théorème de la bijection. À l'aide de ce lemme nous pouvons démontrer facilement le théorème de dérivation des réciproques :

Théorème 8.2.35 (Dérivation des fonctions réciproques)

Soit I et J deux intervalles, et soit f une application bijective continue de I dans J . Soit $t_0 \in I$, et $x_0 = f(t_0)$. Alors, si f est dérivable en t_0 , et si $f'(t_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x_0 , et :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x_0)}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Écrire le taux d'accroissement entre x et x_0 , et au dénominateur, écrire $x - x_0 = f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))$ afin d'introduire le taux d'accroissement de f entre $f^{-1}(x_0)$ et $f^{-1}(x)$. Passer à la limite en utilisant la continuité de f^{-1} . ▷

Exemple 8.2.36

- Dérivée de $x \mapsto e^x$, définie comme réciproque de \ln , elle-même définie comme primitive sur \mathbb{R}_+^* de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1.
- Dérivée de $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ sur \mathbb{R}_+^* .

L'utilisation de la définition de la dérivée par taux d'accroissement permet alors d'obtenir un certain nombre de limites remarquables, pour les fonctions pour lesquels on a trouvé l'expression de la dérivée par des moyens autres que l'utilisation directe du taux d'accroissement :

Proposition 8.2.37 (Limites remarquables pour exp, ln, les puissances)

On a (pour $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

II.6 Stabilité des propriétés de régularité

Les propriétés s'établissent facilement par récurrence à partir des propriétés similaires au rang 1.

Proposition 8.2.38 (Règles pour les fonctions n fois dérivables en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} , et $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit λ et μ deux réels.

1. Si f est n fois dérivable en x_0 , alors λf aussi et $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$.
2. Si f et g sont n fois dérivables en x_0 , alors $f + g$ aussi et $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
3. (**Formule de Leibniz**) Si f et g sont n fois dérivables en x_0 , fg aussi et :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

4. Si f et g sont n fois dérivables en x_0 et si g ne s'annule pas en x_0 , alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable en x_0 (pas de formule simple)

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrences plus ou moins immédiates. Pour la formule de Leibniz, l'argument se déroule comme pour la formule du binôme, en utilisant la formule de Pascal. D'ailleurs, la formule du binôme peut se déduire de la formule de Leibniz, appliquée à des fonctions judicieusement choisies. ▷

Exemple 8.2.39

Dérivée n -ième de $x \mapsto xe^x$.

Proposition 8.2.40 (Composition de fonctions n fois dérivables)

Soit I et J deux intervalles, et f une fonction de I dans J , g une fonction de J dans \mathbb{R} . Soit $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0 et g est n fois dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x_0 . Si de plus $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont continues en x_0 , alors $g \circ f$ également.

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence. ▷

Remarque 8.2.41 (Formule de Faà di Bruno, HP, à ne surtout pas apprendre par cœur)

Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre n d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais cette formule est fort complexe. Pour le plaisir, on énonce, sans démonstration :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ 1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}}{k!} \right)^{m_k} \times g^{(m_1 + \dots + m_n)} \circ f.$$

Vérifiez que pour $n = 1$, on retombe sur la formule connue...

La seule formule de dérivation itérée d'une composée à connaître est le cas simple d'une composée du type $x \mapsto f(ax + b)$, qui s'obtient par une récurrence immédiate (contrairement à celle permettant d'obtenir la formule de Faà di Bruno).

Théorème 8.2.42 (Dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$)

Soit a et b deux réels, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application n fois dérivable en $ax_0 + b$. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est n fois dérivable en x_0 et

$$g^{(n)}(x_0) = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence immédiate. ▷

Le lecteur curieux pourra s'assurer que cette formule est bien conforme à la formule générale de Faà di Bruno.

En exprimant ces résultats pour tous les points d'un intervalle, on obtient :

Corollaire 8.2.43 (Règles de stabilité dans $\mathcal{D}^n(I)$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. L'ensemble $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$ à valeurs dans un intervalle J , et $g \in \mathcal{D}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I)$
3. Soit $f \in \mathcal{D}^n(I)$, bijective de I dans J , et telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$.

◁ Éléments de preuve.

Seul le dernier point n'a pas encore été justifié. Faire une récurrence en passant par l'expression de la dérivée de f^{-1} . ▷

On a les mêmes règles pour la classe \mathcal{C}^n :

Corollaire 8.2.44 (Règles de stabilité dans $\mathcal{C}^n(I)$)

Soit $n \in \mathbb{N}$, ou $n = +\infty$.

1. L'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires, produit et quotient par une fonction ne s'annulant pas.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ à valeurs dans un intervalle J , et $g \in \mathcal{C}^n(J)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$
3. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, bijective de I dans J , et telle que, si $n \neq 0$, f' ne s'annule pas sur I . Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.

◁ Éléments de preuve.

Récurrence facile en dérivant une première fois pour se ramener à l'hypothèse de récurrence. ▷

II.7 Dérivations de fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{C}

Nous élargissons dans ce paragraphe la notion de dérivation au cas de fonctions complexes, ou plus précisément, de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition 8.2.45 (Dérivation d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C})

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite dans \mathbb{C} lorsque le réel h tend vers 0, c'est-à-dire s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Dans ce cas, on définit la dérivée de f en x_0 par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La dérivation d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C} se ramène en fait à la dérivation de deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} (la partie réelle et la partie imaginaire) :

Proposition 8.2.46 (Dérivation des parties réelles et imaginaires)

Soit, avec les mêmes notations, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, et définissons les fonctions f_r et f_i de I dans \mathbb{C} par :

$$\forall x \in I, \quad f_r(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f_r et f_i le sont, et dans ce cas,

$$f'(x_0) = f'_r(x_0) + i f'_i(x_0).$$

◁ Éléments de preuve.

Immédiat en revenant à la définition, et en utilisant le résultat similaire pour les limites de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} . ▷

Les règles de dérivation des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles :

Proposition 8.2.47 (principales règles de dérivation des fonctions complexes)

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions complexes définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et dérivables en $x_0 \in I$. Alors :

- (i) $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- (ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$;
- (iii) fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (iv) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Les démonstrations faites dans le cas réel s'adaptent. On pourrait aussi envisager de décomposer en $f_r + i f_i$. ▷

On ne donne pas de règle générale de dérivation de compositions : composer à la source par une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ne pose pas de problème en considérant partie réelle et partie imaginaire. Composer à l'arrivée est plus délicat, car cela implique des fonctions dont la variable est complexe ; la notion de dérivation de fonctions d'une variable complexe existe (fonctions holomorphes), mais c'est une autre histoire. Nous nous contentons du cas particulier de la composition par l'exponentielle complexe, très utile en physique :

Proposition 8.2.48 (Dérivée de $t \mapsto e^{\varphi(t)}$)

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I ouvert de \mathbb{R} et soit $x_0 \in I$. Soit $\psi : x \mapsto e^{\varphi(x)}$.

Si φ est dérivable en x_0 , alors ψ aussi, et

$$\psi'(x_0) = \varphi'(x_0)e^{\varphi(x_0)}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En décomposant $\varphi = \varphi_r + i \varphi_i$, on décompose ψ en

$$\psi = e^{\varphi_r} \cos \circ \varphi_i + i e^{\varphi_r} \sin \circ \varphi_i.$$

Dériver ces composées réelles. ▷

Exemples 8.2.49

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{ix}$ sur \mathbb{R} .
2. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{ix^2}$ sur \mathbb{R} .
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{e^{ix}}$ sur \mathbb{R} .

En identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , la dérivée de φ correspond à un vecteur tangent (dans un sens que nous ne définissons pas) à la courbe paramétrée par φ au point $\varphi(x_0)$ (voir l'exemple de $x \mapsto e^{ix}$: la tangente au cercle trigonométrique est orthogonal au rayon, donc obtenu par multiplication par un imaginaire pur, ce qui correspond bien au facteur i qu'on obtient dans la dérivation)

III Étude d'une fonction

Dans ce paragraphe, nous voyons comment appliquer les méthodes calculatoires développées dans début de ce chapitre à l'étude des fonctions. Le lien est bien sûr fait par le résultat que vous connaissez bien reliant le signe de la dérivée et les variations de la fonction. Avant d'aborder ce point, nous faisons quelques rappels sur le graphe d'une fonction et les symétries.

III.1 Graphe

Nous rappelons que le domaine de définition d'une fonction f est le sous-ensemble D_f (de \mathbb{R} ici) constitué de l'ensemble des éléments x tels que $f(x)$ soit défini.

Dans le cas d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le graphe, tel que nous l'avons défini dans un chapitre antérieur, correspond au sous-ensemble de \mathbb{R}^2 constitué des éléments $(x, f(x))$, pour $x \in D_f$.

Le graphe permet d'avoir une idée générale de la fonction étudiée. Un graphe précis (par approximations et interpolation à partir d'un grand nombre de points, obtenus par exemple par des expériences) permet d'obtenir facilement une première approximation de solutions de certaines équations ou inéquations.

Certaines opérations simples sur les fonctions se traduisent facilement sur le graphe, comme la composition à la source ou à l'arrivée par $x \mapsto ax$ ou $x \mapsto x - a$.

Une autre opération se traduisant élégamment sur les graphes est la réciproque des fonctions bijectives.

Proposition 8.3.1 (Graphe d'une fonction réciproque, figure 8.1)

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow J$ une bijection. Alors le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie d'axe D , où D est la droite d'équation $y = x$.

III.2 Symétries d'une fonction

Définition 8.3.2 (fonctions paires, impaires, périodiques)

Soit f une fonction de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans \mathbb{R} .

- On dit que f est *paire* si D_f est symétrique par rapport à 0 (donc $D_f = -D_f = \{-x, x \in D_f\}$), et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x).$$

- On dit que f est *impaire* si D_f est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x).$$

- On dit que f est *périodique* de période T si $D_f + T = D_f$ et

$$\forall x \in D_f, \quad f(x + T) = f(x).$$

Remarque 8.3.3

Comment se traduit la parité et l'imparité sur le graphe ?

Définition 8.3.4 (période minimale)

Soit f une fonction périodique, et soit \mathcal{T}^+ l'ensemble des périodes strictement positives de f . Si \mathcal{T}^+ admet un minimum T , alors T est appelée *période minimale* de f , ou *plus petite période* de f .

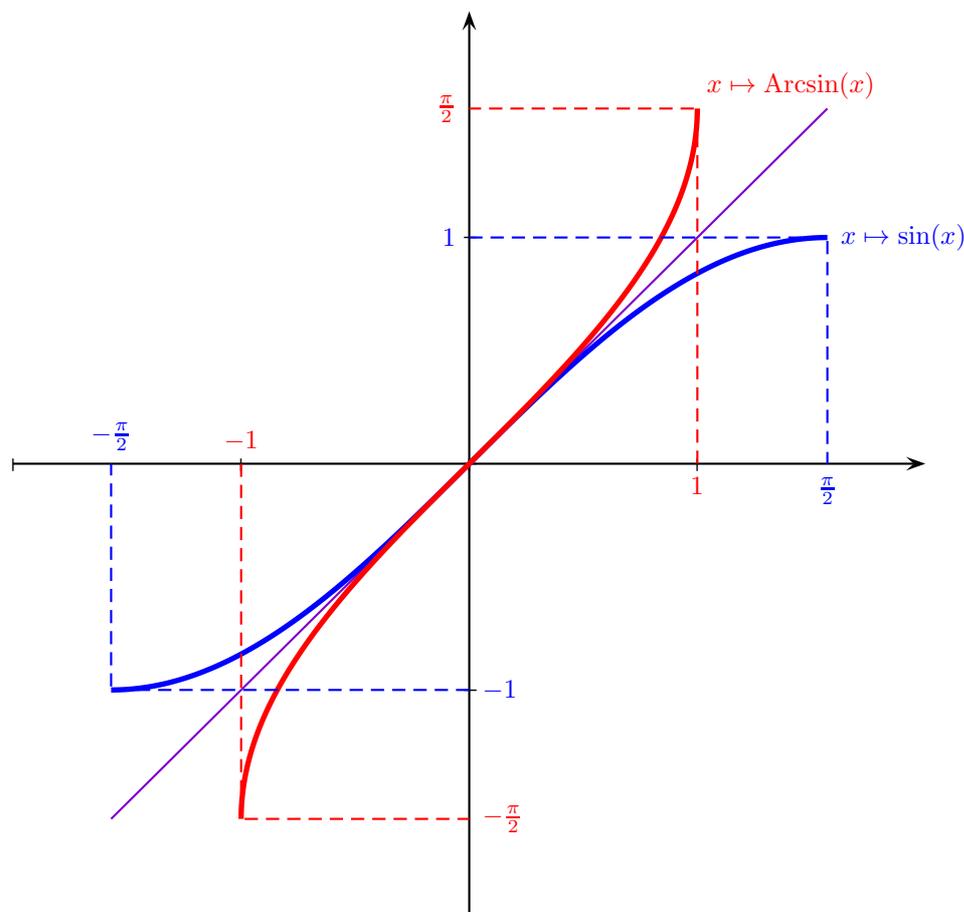


FIGURE 8.1 – Graphe d'une fonction réciproque

Proposition 8.3.5 (description des périodes en fonction de la période minimale)

Soit f une fonction périodique admettant une plus petite période T . Alors l'ensemble des périodes de f est

$$\mathcal{T} = T\mathbb{Z} = \{nT, n \in \mathbb{Z}\}$$

◁ **Éléments de preuve.**

Tout d'abord, si T et T' sont période, $aT + bT'$ aussi, si a et b sont des entiers. Ayant remarqué ceci, procéder par double inclusion, en commençant par la réciproque. Pour le sens direct, si l'inclusion n'est pas vérifiée, trouver par division euclidienne une période contredisant la minimalité de T . ▷

Exemples 8.3.6

1. \cos et \sin sont périodiques de période 2π . Il s'agit de la période minimale.
2. \tan est également périodique de période 2π , mais ce n'est pas la période minimale. La période minimale est π .
3. Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $1_{\mathbb{Q}}$. Quelles sont ses périodes ?

On peut montrer plus généralement qu'une fonction périodique sans période minimale admet un ensemble de périodes dense dans \mathbb{R} . Ce résultat est basé sur la description des sous-groupes de \mathbb{R} , que nous aurons l'occasion d'évoquer dans un chapitre ultérieur.

III.3 Monotonie

On rappelle que f est croissante si elle préserve la relation d'ordre large : pour tout $x, y \in D_f$,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

De même, f est strictement croissante si elle préserve la relation d'ordre stricte. On définit de même la décroissance et la stricte décroissance, par inversion de la relation d'ordre

On dit qu'une fonction est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Avertissement 8.3.7

Si f est croissante (ou décroissante) sur deux intervalles I et J , elle n'est pas nécessairement croissante sur l'union $I \cup J$. Considérer par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $I =]-\infty, 0[$, $J =]0, +\infty[$.

La monotonie suit une règle ressemblant à la règle des signes :

Proposition 8.3.8 (monotonie et composition)

Soit f et g deux fonctions définies sur les sous-ensembles E et F de \mathbb{R} , et telles que $f(E) \subset F$. Alors :

- Si f et g sont croissantes, ou si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante ;
- Si f est croissante et g décroissante, ou si f est décroissante et g croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.

De plus, si la monotonie de f et g est stricte, celle de $g \circ f$ l'est également.

◁ Éléments de preuve.

Pas dur en utilisant la définition : partir de $x < y$.

▷

Remarque 8.3.9

Cette règle des monotonies composées est très utile en pratique, et permet souvent d'obtenir les variations de certaines fonctions de façon beaucoup plus élégante, efficace et rapide que par étude de fonction. C'est le premier réflexe à avoir lorsqu'on vous demande les variations d'une fonction composée.

Proposition 8.3.10 (monotonie et réciproque)

Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective réelle définie sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} . Si f est monotone (nécessairement strictement), alors f^{-1} est monotone, de même sens de monotonie que f .

◁ Éléments de preuve.

Par la définition, en montrant la contraposée.

▷

Proposition 8.3.11 (monotonie et injectivité)

Une fonction strictement monotone sur un sous-ensemble de \mathbb{R} est injective sur ce sous-ensemble.

Enfin, on admet pour le moment le résultat suivant :

Proposition 8.3.12 (Régularité des fonctions monotones)

Une fonction monotone f admet en tout point où cela est envisageable des limites à gauche et à droite (on dit que f est réglée).

III.4 Variations des fonctions, extremum

Nous commençons par un rappel de certaines propriétés (admisses pour le moment) permettant une étude efficace d'une fonction d'une variable, puis nous rappelons le schéma général d'étude d'une fonction.

Théorème 8.3.13 (variations des fonctions dérivables, admis provisoirement)

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, et I un intervalle ouvert tel que f est dérivable sur I . Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

Définition 8.3.14 (Maximum, maximum local)

Soit f défini sur X .

- On dit que f admet en x un maximum si pour tout $y \in X$, $f(y) \leq f(x)$.
- Ce maximum est strict s'il n'est atteint en aucun autre y (donc $f(y) < f(x)$ pour tout $y \neq x$)
- f admet en x un maximum local s'il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $f(y) \leq f(x)$ (donc si $f|_V$ admet un maximum en x).

Théorème 8.3.15 (condition nécessaire pour un extrémum)

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I . Si f admet en x un extrémum local (minimum ou maximum), alors $f'(x) = 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer le signe du taux d'accroissement $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ à gauche et à droite de x . ▷

Cette condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ en 0. Il faut faire une étude locale.

Définition 8.3.16 (point critique)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et $x \in I$. On dit que x est un point critique de f si $f'(x) = 0$.

Ainsi, une CN pour que f présente un extrémum local en $x \in I$ est que x soit un point critique. Attention, c'est évidemment faux si I n'est pas ouvert (cas d'un extrémum sur le bord).

III.5 Comportement asymptotique

Le comportement à l'infini (comportement asymptotique) peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe. On définit pour cela la notion de droite asymptote : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près qu'on veut une portion de la courbe lorsqu'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

Définition 8.3.17 (asymptotes)

- asymptote verticale en a : droite d'équation $x = a$ en a telle que $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$;
- asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$: droite d'équation $y = b$ telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

- Plus généralement, la droite D d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à la courbe \mathcal{C} de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

On définit évidemment une notion similaire en $-\infty$.

Méthode 8.3.18 (Déterminer une droite asymptote (non verticale))

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

- Étudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
 - * Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
 - * Si cette limite est finie, de valeur a , on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
- On étudie la limite de $f(x) - ax$:
 - * Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
 - * Si cette limite est finie, de valeur b , alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exemples 8.3.19

1. Déterminer les asymptotes de la courbe de $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
2. Montrer que $x \mapsto x + \sin x$ admet une direction asymptotique en $-\infty$ et $+\infty$, mais pas d'asymptote.

On peut aussi définir des paraboles asymptotes, avec la condition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax^2 - bx - c = 0,$$

ou même trouver plus généralement une courbe polynomiale asymptote.

III.6 Convexité

Enfin, l'allure de la courbe va dépendre fortement de « l'orientation de la courbure », c'est-à-dire de savoir si le « creux » de la courbe est orienté vers le haut ou vers le bas. C'est ce qu'on appelle la convexité de la courbe. Intuitivement, si le creux de la courbe est orienté vers le haut, la pente de la tangente est de plus en plus forte, donc f' est croissante. Cela amène la définition suivante :

Définition 8.3.20 (fonction convexe, concave, figure 8.2)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

- On dit que f est convexe sur I si f' est croissante sur I ; si f est deux fois dérivable, cela équivaut, si f est deux fois dérivable, à : $f'' \geq 0$ sur I .
- On dit que f est concave sur I si f' est décroissante sur I ; si f est deux fois dérivable, cela équivaut, si f est deux fois dérivable, à : $f'' \leq 0$ sur I .

Exemples 8.3.21

1. $x \mapsto e^x$ est convexe sur \mathbb{R} ;
2. $x \mapsto \ln x$ est concave sur \mathbb{R}_+^*

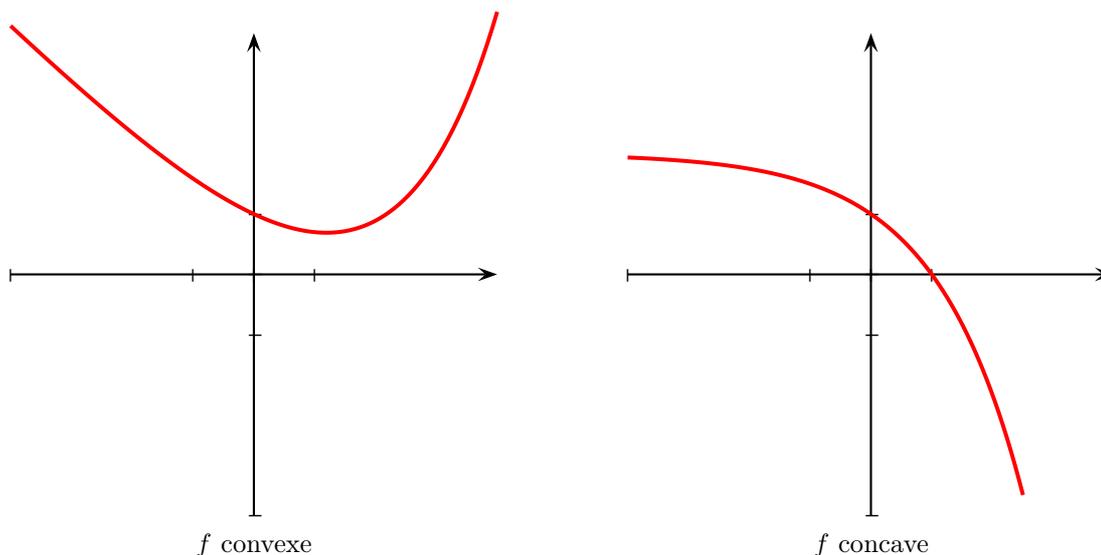


FIGURE 8.2 – Graphe d'une fonction convexe, concave

L'étude générale des fonctions convexes et concave est au programme de Spé. Vous définirez les fonctions convexes dans un contexte plus général (sans hypothèse de dérivabilité) par la position des cordes par rapport à la courbe. La propriété de croissance de f' sera alors une caractérisation pour les fonctions dérivables.

Nous admettons pour le moment les deux comparaisons qu'amène la convexité d'une fonction (comparaison aux cordes, comparaison à la tangente)

Théorème 8.3.22 (Inégalités de convexité)

Soit f une application convexe sur un intervalle I . Alors :

- la courbe de f reste sous ses cordes issues de deux éléments de I : si $x < y$ sont dans I , pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y);$$

- la courbe de f reste au-dessus de ses tangentes en un point de I : si $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

◁ Éléments de preuve.

La démonstration sera vue en Spé. ▷

Exemple 8.3.23

La convexité permet d'obtenir de façon efficace et rapide un certain nombre de petites inégalités ; lorsqu'un des deux membres de l'inégalité est affine, il y a fort à parier que l'inégalité est issue d'une propriété de convexité. Quelques exemples :

- Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$
- Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$.

Définition 8.3.24 (point d'inflexion)

Un point d'inflexion de la courbe de f est un point en lequel f change de convexité.

IV Propriétés des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle

On donne dans cette section quelques résultats, certains que vous connaissez déjà, d'autres qui sont intuitivement faciles à comprendre, mais dont la démonstration rigoureuse nécessitera un examen un peu plus approfondi et est repoussée à plus tard. Donner ici nous permettra de nous habituer à nous en servir dès maintenant dans les exemples et exercices, ce qui ne nécessite pas de maîtriser leur preuve.

Théorème 8.4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires, TVI)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 8.4.2 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités a et b et strictement monotone. Alors f est injective, et se restreint donc à son image en une bijection. Son image est alors un intervalle dont les bornes sont les limites en a et b de f , et sont de même nature (ouvert/fermé) que l'intervalle initial

Théorème 8.4.3 (Théorème de compacité, ou théorème de la borne atteinte)

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors f admet un maximum et un minimum (i.e. f est bornée et atteint ses bornes)

Théorème 8.4.4 (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 8.4.5 (Théorème des accroissements finis, TAF)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

(la pente de la corde entre a et b est égale à la pente d'une tangente intermédiaire).

◁ **Éléments de preuve.**

Les démonstrations ne sont pas importantes à ce stade, elles seront vues plus tard. Il est en revanche important d'avoir bien saisi l'évidence géométrique de ces résultats (évidente toutefois un peu moins flagrante pour le théorème de compacité). ▷

Une conséquence immédiate du TAF est :

Corollaire 8.4.6 (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|,$$

(on dit que f est M -lipschitzienne).

Remarquez que si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, le théorème de compacité fournit l'existence de M tel que ci-dessus.

On termine enfin par une notion renforcée de la continuité.

Définition 8.4.7 (Continuité uniforme)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |y - x| < \eta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Remarquez que la seule différence entre cette définition et la définition de la continuité sur I réside dans l'interversion de deux quantificateurs, donc sur une propriété plus forte d'indépendance : dans cette définition, la marge de sécurité $\eta > 0$ est indépendante du point x de l'intervalle en lequel on étudie la continuité.

Une propriété importante des fonctions continues sur un segment (intervalle fermé borné) est la suivante :

Théorème 8.4.8 (Théorème de Heine)

Soit I un intervalle fermé borné, et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} . Alors f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Même si ce théorème est admis pour le moment, vous pouvez essayer de comprendre l'importance des conditions émises sur l'intervalle (construisez des contre-exemples)

Les fonctions usuelles

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire, la vie des astronomes.

(Pierre-Simon Laplace)

Le logarithme d'un sinus donné est le nombre qui a progressé arithmétiquement avec la même vitesse avec laquelle le rayon a diminué géométriquement jusqu'au sinus donné.

(John Napier, connu en France sous le nom de Jean Néper)

Comme pour trois sinus en proportion continue le carré du moyen est égal au produit des extrêmes, ainsi pour leurs logarithmes, le double du moyen est égal à la somme des deux extrêmes

(John Napier)

Ce chapitre est un catalogue des fonctions usuelles au programme de Math Sup. On y trouve bien entendu le logarithme et l'exponentielle, et les fonctions trigonométriques, mais également les réciproques (partielles) de celles-ci (Arcsin, Arccos et Arctan), et les fonctions hyperboliques (ch, sh, et th), mais sans leurs fonctions réciproques Argch, Argsh et Argth qui ne sont pas au programme.

I Exponentielle, logarithme, puissances

I.1 Logarithme

Définition 9.1.1 (fonction logarithme (népérien) \ln , courbe figure 9.1)

La fonction \ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1

Propriétés 9.1.2 (propriétés de \ln)

Soit $f : x \mapsto \ln(x)$.

- Domaine de définition : $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.
- Dérivation : f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

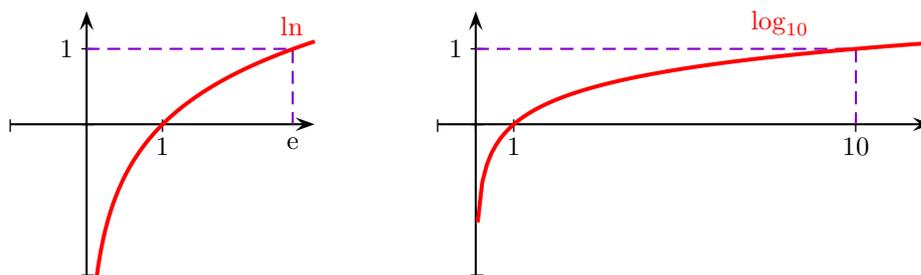
- Variations : \ln est croissante sur son domaine.
- Propriétés de convexité : \ln est **concave** sur \mathbb{R}_+^*
- Inégalité classique : $\forall x \in]-1, \infty[$, $\ln(1+x) \leq x$

- Propriété remarquable : $\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(|a|) - \ln(|b|)$ si $ab > 0$.
En particulier, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
- Valeurs remarquables et limites :
 - * $\ln(1) = 0$
 - * $\ln(e) = 1$ (c'est la définition de e)
 - * $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
 - * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

◁ Éléments de preuve.

- Propriété remarquable : considérer $x \mapsto \ln(ax)$ dont la dérivée est $\frac{1}{x}$. Ainsi, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(ax)$ diffèrent d'une constante. Évaluer en un point bien choisi.
- Limite en $+\infty$: technique de comparaison série/intégrale : minorer l'intégrale sur chaque intervalle $[k, k+1]$. On est ramené à la divergence de la série harmonique, qui s'obtient par groupements de termes (minorer $S_{2n} - S_n$)
- Limite en 0 : Se ramener en $+\infty$.
- Limite remarquable : c'est un taux d'accroissement.

▷

FIGURE 9.1 – Graphes de \ln et \log_{10}

I.2 Exponentielle

Définition 9.1.3 (fonction exponentielle \exp , courbe figure 9.2)

La fonction \exp est la réciproque de \ln (bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}). Elle est indifféremment notée $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto e^x$. On justifiera cette notation plus loin. En attendant, on préfère la première.

Propriétés 9.1.4 (propriétés de la fonction \exp)

Soit $f : x \mapsto \exp(x)$.

- Domaine de définition : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \exp(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \exp(x).$$

- Variations : \exp est croissante sur \mathbb{R} .
- Propriétés de convexité : \exp est convexe sur \mathbb{R}
- Inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$
- Valeurs remarquables et limites :
 - * $\exp(0) = 1$

- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- * On définit le réel e par $e = \exp(1)$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$
 - * $\ln(\exp(x)) = x$, en particulier $\ln(e) = 1$.
 - * $\exp(\ln x) = x$

◁ **Éléments de preuve.**

- Dérivée : utiliser la formule de dérivation des réciproques
- Inégalité classique : par convexité
- Limites en $+\infty$ et $-\infty$: se déduisent des limites du logarithme.
- Limite remarquable : c'est un taux d'accroissement
- Autres propriétés remarquables : se ramener au logarithme. Les dernières ne font qu'exprimer la définition.

▷

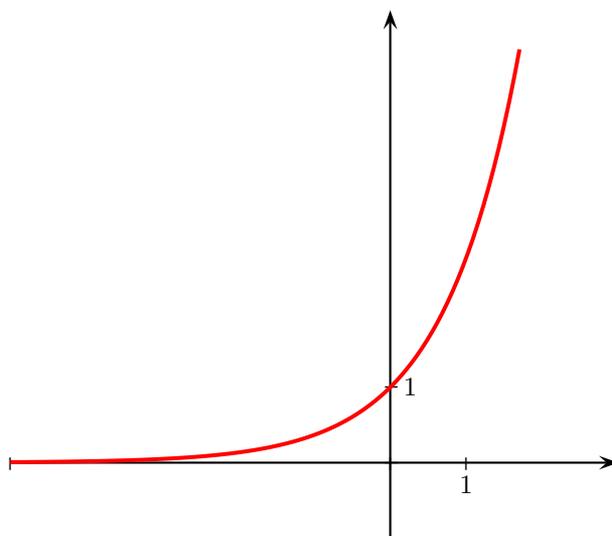


FIGURE 9.2 – Courbe de la fonction \exp

I.3 Fonctions puissances

Définition 9.1.5 (puissance, ou exponentiation)

Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on définit $x^y = \exp(y \ln x)$.

Si $y = n \in \mathbb{Z}$, cela correspond à la puissance x^n obtenue par itération du produit. Remarquez que dans ce cas (et uniquement dans ce cas), on peut étendre, par itération du produit, la définition de la puissance x^y pour $x \leq 0$, mais prenez garde à ne pas écrire cette puissance sous forme exponentielle : cela n'a pas de sens. On pose aussi par convention :

Convention 9.1.6 (puissances de 0)

Soit $y \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$0^y = \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Il s'agit du prolongement par continuité de $x \mapsto x^y$, à y fixé.

On a alors les règles suivantes :

Propriétés 9.1.7 (règles d'exponentiation)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\exp(x) = e^x$
- $\ln(x^a) = a \ln x$.
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^a y^a = (xy)^a$

◁ **Éléments de preuve.**

Cela découle des règles usuelles vérifiées par le logarithme et l'exponentielle. ▷

Définition 9.1.8 (logarithme de base $b > 1$)

Soit $b > 1$, le logarithme de base b est la fonction réciproque de $x \mapsto b^x$, bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Elle est notée \log_b . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\log_b(b^x) = x$, et en particulier, $\log_b(b) = 1$.

Par exemple, on utilise beaucoup en physique le logarithme en base 10, défini par la relation $\log_{10}(10^x) = 10$. Le logarithme en base 10 est souvent notée simplement \log au lieu de \log_{10} . Il n'est pas très utilisé en mathématiques.

En informatique, c'est le logarithme en base 2 qui est le plus fréquemment utilisé. On le note souvent \lg .

Proposition 9.1.9 (expression de \log_b en fonction de \ln)

Pour tout $x > 0$, $\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifier $b^{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = x$. ▷

Ainsi, la courbe de \log_b (donnée en figure 9.1 pour $b = 10$) s'obtient de celle de \ln par affinité verticale de rapport $\frac{1}{\ln b}$. On en déduit notamment la croissance, la concavité, les limites, l'égalité $\log_b(1) = 0$, l'expression de la dérivée :

$$\forall x > 0, \log_b'(x) = \frac{1}{x \ln b},$$

ainsi que l'identité remarquable $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.

Remarquons pour terminer que le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base e .

I.4 Croissances comparées

Les fonctions exponentielle, logarithme, puissances sont souvent utilisées pour donner des ordres de grandeur au voisinage de 0 ou vers l'infini. Il est donc important de pouvoir comparer entre elles ces fonctions, au moins pour les très grandes ou très petites (en valeurs absolues) valeurs.

Théorème 9.1.10 (théorème des croissances comparées en $+\infty$)

1. Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

◁ Éléments de preuve.

- Le cas de $\frac{\ln(x)}{x}$ s'obtient en majorant le logarithme : pour cela, exprimer le logarithme sous forme intégrale, et majorer dans l'intégrale $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sqrt{t}}$.
- Pour $\frac{\ln(x)}{x^\alpha}$, se ramener au cas précédent, en posant $y = x^\alpha$.
- Pour $\frac{x^\alpha}{e^x}$ évacuer le cas $\alpha \leq 0$, puis poser $y = (e^x)^{\frac{1}{\alpha}}$.

▷

Ce théorème affirme que la fonction \ln est très petite à l'infini (= « négligeable ») devant les fonctions puissances (d'exposant fixe), elles mêmes très petites devant l'exponentielle. Aussi dit-on souvent « l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le \ln ».

Dans les situations plus complexes, on peut toujours se ramener à ces situations, en écrivant les puissances sous forme exponentielle, et en étudiant la limite de l'exposant.

Exemple 9.1.11

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\ln x} e^{-\sqrt{x}}$
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\sqrt{\ln x}}$.

Théorème 9.1.12 (théorème des croissances comparées en 0)

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

◁ Éléments de preuve.

Poser $y = \frac{1}{x}$ pour se ramener en $+\infty$.

▷

Ainsi, $\ln x$ est « négligeable » devant les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, ce qui signifie que ces dernières tendent vers $-\infty$ beaucoup plus vite que \ln .

II Fonctions trigonométriques

Nous avons déjà défini et fait une étude sommaire des fonctions trigonométriques \sin , \cos et \tan . Nous complétons un peu cette étude, notamment avec l'expression des dérivées, que nous n'avions pas données à ce moment-là.

II.1 Sinus

Propriétés 9.2.1 (propriétés de sin)

Soit $f : x \mapsto \sin x$.

- Domaine de définition : $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.
- Symétries : \sin est 2π -périodique et impaire.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(N)}(x) = \sin\left(x + \frac{N\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \sin(x) & \text{si } N = 2n \\ (-1)^n \cos(x) & \text{si } N = 2n + 1. \end{cases}$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Limites : Pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
- Propriétés de convexité :
 \sin est convexe sur les intervalles $[-\pi, 0] + 2k\pi$ et concave sur les intervalles $[0, \pi] + 2k\pi$
- Inégalités classiques
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin x \leq x$
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \sin x \geq x$
 - * $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

◁ **Éléments de preuve.**

Les inégalités classiques s'obtiennent par concavité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (comparaison à la tangente en 0 ou aux cordes), qu'on prolonge facilement à \mathbb{R}_+ pour la première. La limite remarquable peut être vue comme un taux d'accroissement. Mais comme on a établi la formule de dérivation du sinus à partir de cette limite, ce point de vue n'est pas satisfaisant. Se rappeler qu'on a obtenu cette limite par un argument géométrique, en comparant certaines aires dans le cercle trigonométrique. ▷

II.2 Cosinus**Propriétés 9.2.2 (propriétés du cosinus cos)**

Soit $f : x \mapsto \cos x$.

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Symétries : \cos est 2π -périodique et paire.
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(N)}(x) = \cos\left(x + \frac{N\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \cos(x) & \text{si } N = 2n \\ (-1)^{n+1} \sin(x) & \text{si } N = 2n + 1. \end{cases}$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Limites : Pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

◁ **Éléments de preuve.**

La limite remarquable se déduit de celle portant sur le sinus, en exprimant $1 - \cos(x)$ à l'aide de $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. ▷

II.3 Tangente

Propriétés 9.2.3 (propriétés de la tangente \tan)

Soit $f : x \mapsto \tan x$.

- Domaine de définition : $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Symétries : \tan est π -périodique et impaire.
- Dérivation : \tan est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$$

- Variations : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Valeurs particulières : Voir le chapitre sur les nombres complexes
- Inégalités classiques :
 - * $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) \geq x$ (comparaison à la tangente en 0)
 - * $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\tan(x) \leq x$.
- Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

◁ Éléments de preuve.

Les inégalités classiques sont des inégalités de convexité. La limite remarquable est un taux d'accroissement, ou découle de celle portant sur le sinus. ▷

Les deux expressions de la dérivée de \tan sont à connaître, car suivant les situations, on peut avoir intérêt à utiliser l'une ou l'autre.

Les courbes des fonctions trigonométriques sont représentées dans le chapitre sur les nombres complexes. Évidemment, parmi les propriétés importantes à bien connaître, il y a toutes les formules de trigonométrie déjà vues dans un chapitre antérieur.

III Réciproques des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives ni même injectives (elles ne peuvent pas l'être puisqu'elles sont périodiques). Même sur une période, on n'a pas l'injectivité (sauf pour la tangente). Mais en restreignant davantage le domaine de définition, on obtient des fonctions injectives, surjectives sur leur image. Cela permet de considérer leurs fonctions réciproques. Le graphe de ces fonctions s'obtient alors en utilisant la proposition 8.3.1, par symétrie par rapport à la première bissectrice.

III.1 Arctangente

La plus importante des fonctions réciproques de fonctions trigonométriques est probablement l'arctangente. Nous commençons donc par elle.

Définition 9.3.1 (arctangente, Arctan , courbe figure 9.3)

La fonction \tan se restreint en une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

La fonction arctangente, notée Arctan , est par définition la réciproque de \tan restreinte à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques permet d'obtenir le résultat important suivant :

Théorème 9.3.2 (Dérivée de Arctan)

La fonction $f = \text{Arctan}$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

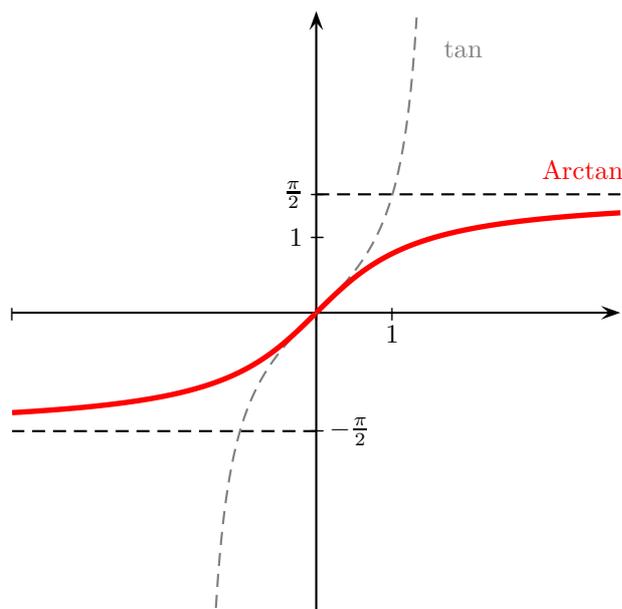


FIGURE 9.3 – Courbe de Arctan

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser la formule de dérivation des fonctions réciproques. ▷

Ainsi, il faut toujours garder en tête les deux facettes de l'Arctan :

- définition comme fonction réciproque de la tangente
- l'arctangente se « dérive bien » (en une fraction rationnelle); autrement dit, Arctan est une primitive d'une fonction rationnelle simple (à retenir, on s'en sert très souvent dans des calculs d'intégrales)

Une fois l'expression de la dérivée obtenue, le reste de l'étude de la fonction Arctan est classique.

Propriétés 9.3.3 (propriétés de Arctan)

Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$

• Domaine de définition : $\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

• Symétries : Arctan est impaire.

• Variations : Arctan est croissante sur \mathbb{R} .

• Valeurs remarquables :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arctan}(0) = 0$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}; \quad \text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}; \quad \text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}; \quad \text{Arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

• Inégalités classiques :

* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arctan}(x) \leq x$ (comparaison à la tangente en 0)

* $\forall x \in \mathbb{R}_-, \text{Arctan}(x) \geq x$.

• Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1$.

• Autres propriétés remarquables :

* $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$

* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$

* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x - k\pi$.

- * $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \varepsilon(x) \frac{\pi}{2}$, où $\varepsilon(x)$ est le signe de x .
- Arctangente et argument d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, a et b étant réels et $a \neq 0$. Alors

$$\arg(z) \equiv \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} [\pi].$$

L'égalité est valable modulo 2π si et seulement si $a > 0$.

◁ Éléments de preuve.

Les limites découlent des asymptotes verticales de la tangente.

Encore une fois, les inégalités sont des inégalités de convexité. La limite remarquable est un taux d'accroissement. On peut aussi déduire ces propriétés des propriétés similaires de la tangente.

Les deux premiers points des propriétés remarquables ne font qu'exprimer la définition de l'arctangente. Le troisième ramène à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour pouvoir utiliser la définition. Le quatrième peut s'obtenir par dérivation de l'expression et simplification (c'est un procédé classique). ▷

III.2 Arcsinus

Définition 9.3.4 (fonction arcsinus, Arcsin, courbe figure 9.4)

La fonction sin induit par restriction une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. La réciproque de cette fonction est appelée arcsinus, notée $\operatorname{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

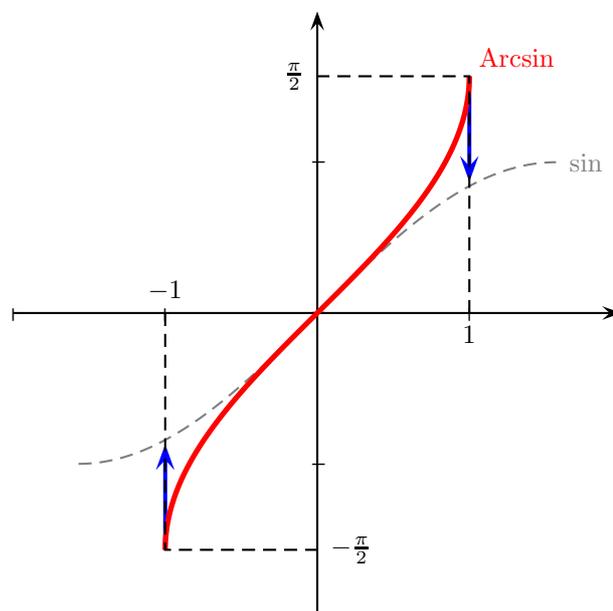


FIGURE 9.4 – Graphe de Arcsin

Comme pour la fonction Arctan , la première étape de l'étude est l'obtention de l'expression de la dérivée. Là encore, on obtient une dérivée très simple ; ainsi, Arcsin est à voir comme primitive d'une certaine expression, qui n'est pas une fraction rationnelle cette fois, mais qu'on rencontre tout de même assez souvent dans des calculs d'intégrales.

Théorème 9.3.5 (Dérivée de Arcsin)

La fonction $f = \text{Arcsin}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En revanche, elle n'est pas dérivable en -1 et 1 , et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.

◁ **Éléments de preuve.**

Dérivée de fonctions réciproques. ▷

Propriétés 9.3.6 (propriétés de Arcsin)

Soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$

- Domaine de définition : $[-1, 1]$.
- Dérivation : f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, et : $\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Symétries : Arcsin est impaire.
- Variations : Arcsin est croissante sur $[-1, 1]$.
- Valeurs remarquables : voir tableau figure 9.6
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}x}{x} = 1$.
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$
 - * $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$
 - * $\forall x \in] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = \pi - x$
 - * Les autres valeurs de $\text{Arcsin}(\sin(x))$ s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité, comme dans le cas de l'arctangente.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est toujours un peu pareil. Pour les derniers points, on peut toujours se ramener à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ par périodicité. Sur la deuxième moitié de l'intervalle, il faut utiliser la symétrie par $\pi - x$ pour se ramener au bon intervalle. ▷

III.3 Arccosinus

L'étude de l'arccosinus, réciproque de cos sur un intervalle adéquat, est très similaire à celle de l'arcsin.

Définition 9.3.7 (fonction arccosinus, Arccos, courbe figure 9.5)

La fonction cos induit par restriction une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. La réciproque de cette fonction est appelée arccosinus, notée $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

De par les symétries existant entre sin et cos, les courbes de Arccos et Arcsin peuvent se déduire l'une de l'autre par des symétries (qu'on explicite dans les propriétés ci-dessous). On obtient donc sans surprise :

Théorème 9.3.8 (Dérivée de Arccos)

La fonction $f = \text{Arccos}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En revanche, elle n'est pas dérivable en -1 et 1 , et la courbe présente en ces points des tangentes verticales.

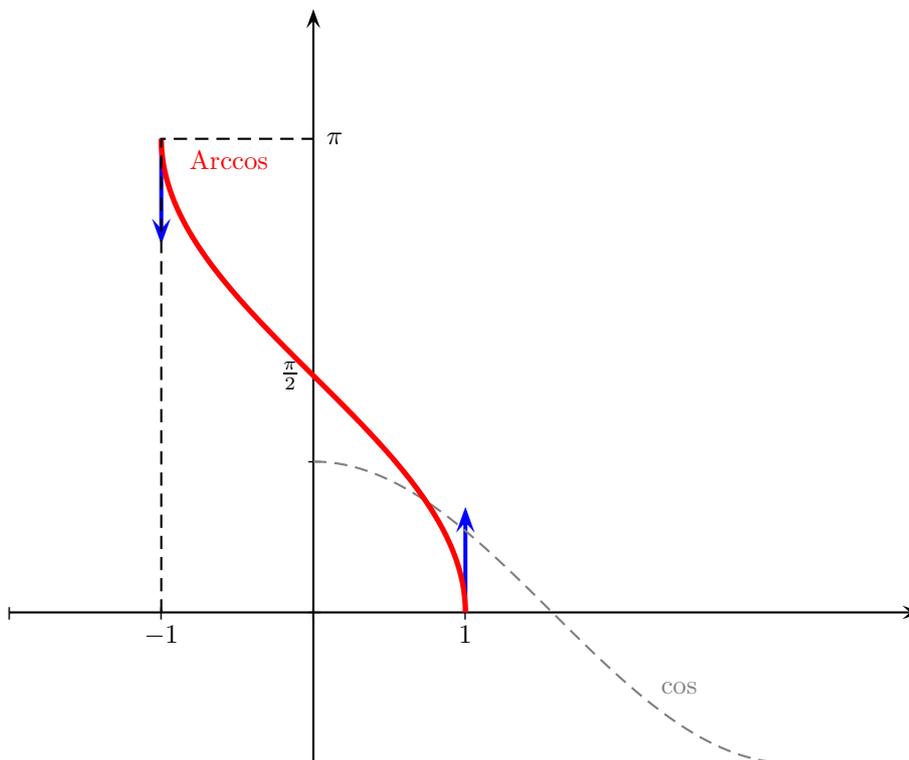


FIGURE 9.5 – Graphe de Arccos

◁ Éléments de preuve.

Dérivée de fonctions réciproques.

▷

Propriétés 9.3.9 (propriétés de Arccos)

Soit $f : x \mapsto \text{Arccos}(x)$

- Domaine de définition : $[-1, 1]$.
- Dérivation : f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, et $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Variations : Arccos est décroissante sur $[-1, 1]$.
- Valeurs remarquables : voir tableau figure 9.6
- Autres propriétés remarquables :
 - * $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$
 - * $\forall x \in [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$
 - * $\forall x \in [-\pi, 0]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = -x$
 - * Les autres valeurs de $\text{Arccos}(\cos(x))$ s'obtiennent en se ramenant à un de ces deux intervalles par périodicité.
 - * $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ (symétrie entre Arccos et Arcsin)

IV Fonctions hyperboliques

D'autres fonctions qu'on rencontre fréquemment en physique, et qui sont bien utiles en mathématiques, notamment pour le calcul de certaines intégrales, sont les fonctions hyperboliques, qui sont obtenues à l'aide de l'exponentielle réelle par des formules ressemblant aux formules d'Euler, liant les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe. Cette analogie forte avec les fonctions trigonométriques motive

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
Arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
Arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	

FIGURE 9.6 – Tableau des valeurs particulières de Arctan, Arcsin, Arccos.

la terminologie utilisée (sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique...), et explique pourquoi la plupart des formules de trigonométrie ont un analogue hyperbolique.

Définition 9.4.1 (sinus, cosinus, tangente hyperboliques, figure 9.7)

Les fonctions « sinus hyperbolique », « cosinus hyperbolique » et « tangente hyperbolique », notées respectivement sh, ch et th, sont les fonctions définies par les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Vous pouvez constater que sh et ch sont en fait, de par leur définition même, la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle. Ainsi, sh est impaire, ch est paire, et $\text{sh} + \text{ch} = \exp$.

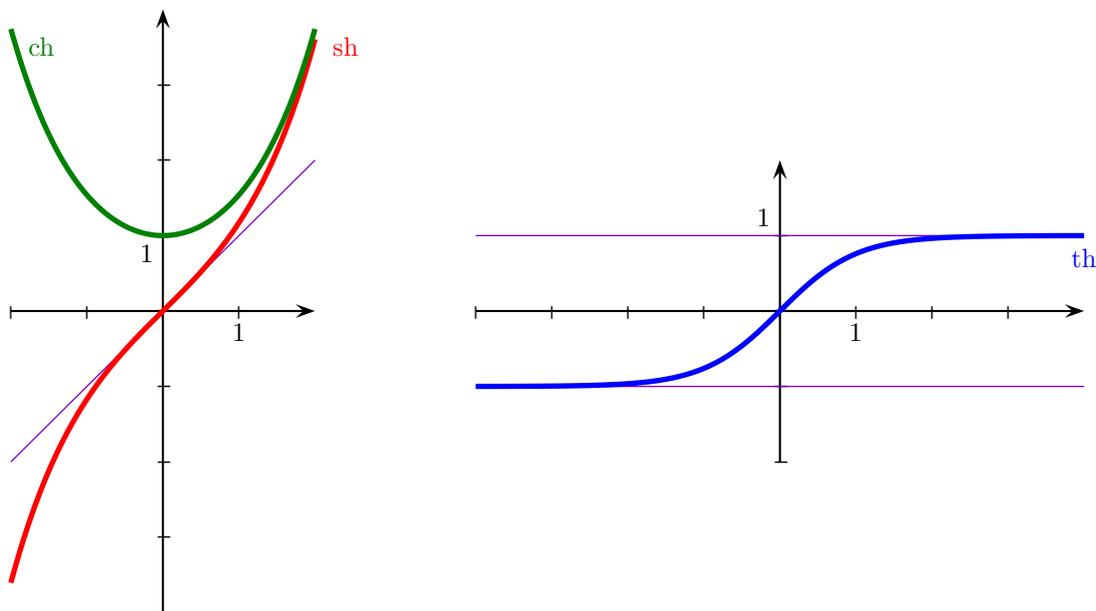


FIGURE 9.7 – Graphes des fonctions hyperboliques

Propriétés 9.4.2 (propriétés de sh)

Soit $f : x \mapsto \text{sh}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .

- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Symétries : sh est impaire.
- Variations : sh est croissante sur \mathbb{R} .
- Valeurs remarquables : $\operatorname{sh}(0) = 0$
- Inégalités classiques :
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh}(x) \geq x$ (comparaison à la tangente en 0)
 - * $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $\operatorname{sh}(x) \leq x$ (*idem*)
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$.

Propriétés 9.4.3 (propriétés de ch)

Soit $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{sh}(x), \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Symétries : ch est paire.
- Variations : ch est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ .
- Valeurs remarquables : $\operatorname{ch}(0) = 1$
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

◁ Éléments de preuve.

Sans difficulté, toujours pareil. ▷

Nous ne donnons qu'une formule de trigonométrie hyperbolique, les autres peuvent être retrouvées à l'aide des exponentielles (par exemple des formules pour $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a) + \operatorname{sh}(b)$ etc).

Théorème 9.4.4 (identité remarquable)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

◁ Éléments de preuve.

Factoriser cette différence de deux carrés. ▷

Propriétés 9.4.5 (propriétés de th)

Soit $f : x \mapsto \operatorname{th}(x)$

- Domaine de définition : \mathbb{R} .
- Dérivation : f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$
- Symétries : th est impaire.
- Variations : th est croissante sur \mathbb{R} .
- Valeurs remarquables : $\operatorname{th}(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$.
- Limite remarquables : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} = 1$.

Note Historique 9.4.6

- Le premier à introduire les fonctions hyperboliques est le mathématicien et physicien italien Jacopo Riccati en 1760, dans le but d'exprimer l'aire sous une hyperbole (d'où le nom donné à ces fonctions). Ses définitions sont purement géométriques, et ne font pas référence à l'exponentielle.
- C'est Jean-Henri Lambert vers 1770 qui exprime sh et ch à l'aide de la fonction exponentielle, et qui en fait une étude complète.

V Réciproques des fonctions hyperboliques (HP)

Les réciproques des fonctions hyperboliques sont hors programme. Signalons tout de même que :

- sh est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et sa réciproque est appelée « argument sinus hyperbolique » et notée Argsh.
- ch est bijective de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$, et sa réciproque, définie sur $[1, +\infty[$, est appelée « argument cosinus hyperbolique » et notée Argch
- th est bijective de \mathbb{R} sur $] - 1, 1[$, et sa réciproque, définie sur $] - 1, 1[$, est appelée « argument tangente hyperbolique », et notée Argth.

Une propriété remarquable des fonctions Argsh, Argch et Argth est qu'elles peuvent s'exprimer explicitement à l'aide des fonctions ln et $\sqrt{\quad}$.

Soit en utilisant ces expressions explicites, soit en utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on obtient la dérivabilité de ces fonctions (sauf Argch en 1) et les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[, \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in]-1, 1[, \text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

VI Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Le tableau 9.8 rappelle l'ensemble des dérivées à bien connaître. Nous n'y incluons pas les dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques (HP).

$f(x)$	domaine de définition	domaine de dérivabilité	$f'(x)$
c ($c \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}
x^n ($n \in \mathbb{Z}_-^*$)	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	nx^{n-1}
x^α ($\alpha \in]1, +\infty[\setminus \mathbb{N}$)	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	$\alpha x^{\alpha-1}$
x^α ($\alpha \in]0, 1[$)	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
cas particulier \sqrt{x}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α ($a \in \mathbb{R}_-^*$)	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	e^x
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
$\log_b(x)$ ($b \in \mathbb{R}_+^*$)	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x \ln b}$
$\sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos(x)$
$\cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	idem	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\text{Arcsin}(x)$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arccos}(x)$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arctan}(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{sh}(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\text{ch}(x)$
$\text{ch}(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\text{sh}(x)$
$\text{th}(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$

FIGURE 9.8 – Tableau des dérivées à connaître

Calcul intégral

Lorsqu'on a vu un étudiant de deuxième ou troisième année en Faculté des Sciences peiner pendant 10 minutes pour faire un changement de variables ou une intégration par parties, on ne peut être que prodigieusement agacé, surtout (comme c'est parfois le cas) si le même étudiant assaisonne son ignorance et sa maladresse d'un jargon prétentieux et inutile qu'il n'a pas su davantage assimiler

(Jean Dieudonné)

Le but de ce chapitre est de fournir les bases du calcul intégral. Il s'agit donc de développer les techniques calculatoires, sans se préoccuper pour le moment des fondements théoriques du calcul intégral (à savoir la théorie de l'intégration, avec la construction de l'intégrale). Pour ce faire, notre point de départ sera le théorème fondamental du calcul intégral affirmant que l'intégrale est obtenue comme différence de la primitive évaluée aux deux bornes. Ce théorème sera démontré dans un chapitre ultérieur.

À partir de là, nous développons toutes les techniques calculatoires usuelles, en particulier l'intégration par parties et le changement de variables. Nous donnons une ouverture vers les formules de Taylor, la formule de Taylor avec reste intégral étant obtenue par intégrations par parties itérées.

Sauf mention explicite du contraire, les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , et à valeurs réelles. Nous discuterons rapidement en fin de chapitre du cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{C} .

I Calcul intégral et primitivation

Cette section a pour but de mettre en place de façon rapide (et sans aborder tous les aspects théoriques sous-jacents) les techniques du calcul intégral. La notion d'intégrabilité est à prendre ici dans un sens assez vague : une fonction sera dite intégrable sur un intervalle $[a, b]$ si on sait définir correctement son intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Nous préciserons ce point plus tard. L'exemple le plus important de fonctions intégrables est le cas des fonctions continues sur $[a, b]$, ou continues par morceaux. Vous pouvez dans ce chapitre vous limiter à cette situation.

I.1 Résultats issus de la théorie

Nous admettons **provisoirement** les résultats de ce paragraphe, issus de la construction de l'intégrale.

Théorème 10.1.1 (Linéarité de l'intégrale, admis provisoirement)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ est aussi intégrable et

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

Théorème 10.1.2 (Croissance, positivité et stricte positivité de l'intégrale, admis prov.)

1. Soit $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , et telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt$$

2. En particulier, si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) \, dt \geq 0$.

3. Enfin, si f est continue positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) \, dt > 0$.

Théorème 10.1.3 (Inégalité triangulaire intégrale, admis provisoirement)

Soit $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors $\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$.

Ces deux résultats ne nous seront pas indispensables pour la plus grande partie de ce chapitre, mais peuvent être utiles au détour d'un exercice.

Théorème 10.1.4 (Intégrabilité des fonctions continues, admis provisoirement)

Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , sont intégrables : on peut donc considérer leur intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$.

Par ailleurs, nous rappelons la notion de primitive :

Définition 10.1.5 (primitive)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit E un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} et $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. Une primitive F de f est une fonction $F : E \rightarrow \mathbb{C}$, dérivable sur E et telle que pour tout $x \in E$, $F'(x) = f(x)$.

Les fonctions de dérivée nulle sur un intervalle étant les fonctions constantes, on a de façon immédiate :

Proposition 10.1.6 (unicité d'une primitive à constante près)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f admettant une primitive F . Alors l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$.

Autrement dit, deux primitives de f sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante additive.

En particulier, si f admet au moins une primitive, alors, étant donné $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Avertissement 10.1.7

Attention, ce résultat n'est pas vrai si I n'est pas un intervalle. Si I est une réunion disjointe d'intervalles ouverts, les primitives diffèrent d'une fonction constante sur chacun des intervalles ouverts de l'union (mais pouvant différer d'un intervalle à l'autre).

Nous pouvons maintenant énoncer, et démontrer à l'aide des résultats admis, notre point de départ pour l'étude pratique de l'intégration :

Théorème 10.1.8 (Expression intégrale d'une primitive)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et $x_0 \in I$. Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est une primitive de f . Il s'agit de LA primitive s'annulant en x_0 .

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser un résultat précédent pour justifier que F est bien défini. Étudier la dérivabilité en x par taux d'accroissement. Pour passer à la limite, encadrer f au voisinage de x entre $f(x) - \varepsilon$ et $f(x) + \varepsilon$, par continuité. ▷

Remarque 10.1.9

En particulier, ce théorème affirme que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. On va même un peu plus loin puisqu'on donne une explicitation de cette primitive sous forme d'une intégrale.

Remarque 10.1.10

- Il existe des fonctions non continues admettant des primitives. On peut montrer par exemple que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable, de dérivée non continue. Cette dérivée, bien que non continue, admet donc une primitive.
- Cependant, toute fonction n'admet pas de primitive. On peut montrer par exemple qu'une dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux). Ainsi, toute fonction ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas primitivable. C'est le cas par exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, ou plus simplement de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

On en déduit de façon immédiate le théorème fondamental du calcul intégral :

Théorème 10.1.11 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

◁ **Éléments de preuve.**

F diffère de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ d'une constante, qu'on détermine en a . ▷

Nous faisons les mises en garde suivantes :

Avertissement 10.1.12

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est énoncé pour des fonctions continues uniquement :

- Si f n'est pas continue, $x \mapsto \int_{x_0}^x f(x) dx$ peut ne pas être une primitive de f (voir le cas d'une fonction obtenue en modifiant une valeur d'une fonction continue); il existe même des fonctions intégrables non primitivables
- Il existe des fonctions non intégrables f admettant des primitives; f étant non intégrable, le théorème fondamental du calcul des intégrales tombe en défaut!

Exemples 10.1.13

- Pour un exemple illustrant le premier point, on peut admettre le théorème de Darboux énoncé dans la remarque précédente. Une fonction ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires n'est donc pas une dérivée, et n'est par conséquent pas primitivable. Ce n'est pas dur de trouver une telle fonction, en s'arrangeant pour qu'elle soit intégrable (par exemple une fonction continue par morceaux).

Remarquez qu'on peut construire un exemple simple en partant d'une fonction continue simple (par exemple une fonction constante) et en remplaçant la valeur en un point. Les fonctions intégrales associées à la fonction initiale et à la fonction modifiée sont alors les mêmes et ne peuvent pas être primitive des deux fonctions à la fois.

- Pour un exemple illustrant le second point, on admettra qu'une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur un intervalle fermé borné est bornée. On le justifiera dans un chapitre ultérieur. Considérez alors la fonction

$$F : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vérifiez (en formant le taux d'accroissement en 0) que F est dérivable sur \mathbb{R} donc sur $[-1, 1]$. Sa dérivée f est-elle intégrable?

I.2 Primitivations composées

Le théorème fondamental du calcul intégral montre à quel point il est important de savoir calculer des primitives. En particulier, une bonne connaissance des primitives des fonctions usuelles est indispensable pour une bonne maîtrise du calcul intégral. Ces primitives dont une bonne connaissance est indispensable sont rappelées dans le tableau de la figure 10.1. **À connaître sur le bout des doigts.**

Par commodité, et par référence au théorème fondamental du calcul intégral, nous introduisons la notation suivante :

Notation 10.1.14

Étant donnée une fonction continue f , on désigne par $\int f(t) dt$, ou parfois plus simplement par $\int f$ une primitive de f .

Avertissement 10.1.15

Il faut être bien conscient que cette notation n'est définie qu'à une constante près. Il s'agit donc d'un abus de notation, à manipuler avec précautions, comme toute notation abusive.

Des primitives usuelles, nous pouvons en déduire d'autres, obtenues par les règles de compositions, en lisant à l'envers la formule de dérivation des fonctions composées :

Proposition 10.1.16 (primitivation de fonctions composées)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et admettant une primitive F . Soit u une fonction dérivable de J dans I , où J est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Alors, une primitive de $u' \times f \circ u$ est $F \circ u$:

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f \right) \circ u.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dériver $F \circ u$.

▷

Avertissement 10.1.17

Attention, la fonction $f \circ u$ ne se primitive pas en $\frac{F \circ u}{u'}$!!

Exemples 10.1.18

1. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{x(1 + \ln x^2)}$.
2. Primitives de $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$

Un cas fréquent est celui d'une composition par $x \mapsto (ax + b)$. Ici, la dérivée de cette dernière fonction étant constante, on peut la passer du côté de la primitive (par linéarité de la dérivation). On obtient alors :

Corollaire 10.1.19 (Primitivation de $x \mapsto f(ax + b)$)

Soit F une primitive de f sur un intervalle I , et a et b deux réels, $a \neq 0$. Soit J un intervalle tel que $aJ + b \subset I$. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est primitivable sur J , et une primitive en est $G : x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$.

Ce n'est bien sûr qu'une réexpression dans un cas très particulier du théorème général de primitivation des composées. Nous voyons comment utiliser ce résultat pour la primitivation des fractions rationnelles du type $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$, qu'on rencontre assez fréquemment. La méthode, basée sur la mise sous forme canonique, est à savoir mettre en place sans hésiter

Méthode 10.1.20 (primitivation d'inverses de trinômes)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

1. Si P admet une racine double r , $\frac{1}{P}$ se primitive en $x \mapsto \frac{-1}{a(x - r)}$.
2. Si P admet deux racines réelles r_1 et r_2 , chercher α et β tels que

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2}.$$

La fonction $\frac{1}{P}$ se primitive en $x \mapsto \alpha \ln |x - r_1| + \beta \ln |x - r_2|$

3. Si P n'a pas de racine réelle, effectuer une mise sous forme canonique pour obtenir :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{\gamma}{(\alpha x + \beta)^2 + 1},$$

puis utiliser une primitivation composée : une primitive en est

$$x \mapsto \frac{\gamma}{\alpha} \operatorname{Arctan}(\alpha x + \beta).$$

Cette méthode est adaptable au cas de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. La mise sous forme canonique nous ramène dans ce cas soit à une dérivée (composée) de Arcsin , soit Argch , soit encore Argsh .

Exemples 10.1.21

1. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$
2. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Nous avons indiqué dans la figure 10.1 les différentes expressions composées qu'on peut primitiver en partant de chacune des fonctions usuelles. Par convention, dans ce tableau les fonctions dont le nom est une lettre majuscule correspondent aux primitives des fonctions en lettres minuscules correspondantes. Par ailleurs, dans la dernière colonne, nous avons noté par abus $\sin(u)$ pour la fonction composée de \sin et u , et de même pour un certain nombre d'autres fonctions. Cette notation est incorrecte, mais commode ici.

II Techniques de calcul intégral

Comme annoncé ci-dessus, notre point de départ est le théorème fondamental du calcul intégral (qui, vu son importance, est parfois aussi appelé théorème fondamental de l'analyse). Ce théorème est à la base des deux grandes techniques (outre le calcul direct à l'aide d'une primitive) permettant de calculer des intégrales :

II.1 Intégration par parties

Théorème 10.2.1 (Intégration par parties ; nous nous autoriserons l'abréviation IPP)

Soit f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser le théorème fondamental sur la fonction $f'g + fg'$ dont une primitive est fg . ▷

En effectuant plusieurs intégrations par parties successives, on obtient :

$f(x)$	$F(x)$	intervalle	g	G
0	0	\mathbb{R}	0	0
a	ax	\mathbb{R}	au'	au
x^p ($p \neq -1$)	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	\mathbb{R} ou \mathbb{R}_+ suivant p	$u'u^p$	$\frac{u^{p+1}}{p+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	\mathbb{R}^*	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
e^x	e^x	\mathbb{R}	$u'e^u$	e^u
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}	$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}	$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$u' \tan(u)$	$-\ln \cos(u) $
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$u' + u' \tan^2(u)$	$\tan(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	\mathbb{R}	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan}(u)$.
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$ ou $-\text{Arccos}(x)$	$] -1, 1[$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\text{Arcsin}(u)$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	\mathbb{R}	$u' \text{sh}(u)$	$\text{ch}(u)$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	\mathbb{R}	$u' \text{ch}(u)$	$\text{sh}(u)$
$\text{th}(x)$	$\ln(\text{ch}(x))$	\mathbb{R}	$u' \text{th}(u)$	$\ln(\text{ch}(u))$
$\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\text{th}(x)$	\mathbb{R}	$\frac{u'}{\text{ch}^2(u)}$	$\text{th}(u)$
$1 - \text{th}^2(x)$	$\text{th}(x)$	\mathbb{R}	$u' - u' \text{th}^2(u)$	$\text{th}(u)$

FIGURE 10.1 – Tableau des primitives à connaître

Théorème 10.2.2 (Intégration par parties itérée, HP)

Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ ($n \geq 1$). Alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x) \, dx = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence, ou bien vérifier que ce qu'il y a entre crochets est une primitive de la partie intégrale (dériver et télescoper). ▷

Remarque 10.2.3 (Comment retenir cette formule)

- La partie variations est la partie intégrée de la formule : pour chaque terme de la somme l'ordre total de dérivation est un de moins que l'ordre total dans l'intégrale, donc $n - 1$. On somme sur toutes les façons de dériver f et g avec un ordre total de $n - 1$.

- Le signe qui alterne dans la somme provient du fait qu'à chaque étape, on change le signe de l'intégrale. La première étape doit donner un signe positif. Or, la première étape de l'IPP donne le facteur $f^{(n-1)}g$, donc correspond à l'indice $i = 0$. Ainsi, le signe est $(-1)^i$.
- Le signe devant l'intégrale provient du fait qu'on a effectué n intégrations par parties (autant qu'il faut pour abaisser le degré de dérivation de f jusqu'à 0); chaque intégration par parties change le signe devant l'intégrale.

Cette formule étant théoriquement hors programme, on peut l'utiliser, mais en disant qu'on répète plusieurs intégrations par parties plutôt que d'invoquer directement la formule d'intégration par parties itérée. La différence est subtile, et permet de respecter le programme à peu de frais. Si vous n'êtes pas trop sûr de vous, sachez qu'une IPP itérée à un ordre n indéterminé peut toujours se ramener à un raisonnement par récurrence utilisant une IPP simple.

Exemple 10.2.4

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ sous forme d'une somme. Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'un cas particulier de la fonction Γ d'Euler, définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. On peut donc voir la fonction Γ comme un prolongement à \mathbb{R} de la factorielle.

Une conséquence importante du théorème d'intégration par parties itérée est la formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 10.2.5 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

◁ Éléments de preuve.

Effectuer $n+1$ intégrations par parties successives, en dérivant $t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$. la dernière dérivation annule ce terme. ▷

Corollaire 10.2.6 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $a < b$, et f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, telle que $m \leq f^{(n+1)} \leq M$ sur $[a, b]$. Alors

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque 10.2.7

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange est souvent utilisée dans la version suivante : si f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$ et $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. La version générale de l'inégalité permet d'établir par exemple que sous les mêmes hypothèses, si $f^{(n+1)} \geq 0$, alors

$$f(b) \geq \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!},$$

et de même dans l'autre sens lorsque $f^{(n+1)} \leq 0$.

3. Que reconnaissez-vous pour $n = 0$?

L'inégalité de Taylor est vraie dans un cas un peu plus général : il suffit en fait que f soit de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$, la majoration de $f^{(n+1)}$ étant alors à donner sur $]a, b[$. Ce résultat plus précis est hors-programme et la démonstration en est plus délicate ; mais on la verra dans un chapitre ultérieur.

Si on réexprime le théorème d'intégration par parties pour le calcul des primitives, on obtient :

Corollaire 10.2.8 (Intégration par parties pour le calcul des primitives)

Soit f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . Alors, sur l'intervalle I :

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

◁ **Éléments de preuve.**

C'est l'expression de la dérivée d'un produit !

▷

Exemple 10.2.9

Calcul d'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

II.2 Changements de variables

La deuxième grande technique du calcul intégral est celle du changement de variable, qui n'est en fait qu'une réexpression commode de la primitivation de fonctions composées.

Théorème 10.2.10 (Changement de variables)

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, et u une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $[a, b]$ vers $[\alpha, \beta]$. Alors f est intégrable entre $u(a)$ et $u(b)$, et :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx = \int_a^b f(u(t))u'(t) dt.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = u(t)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser le théorème fondamental sur chacune des deux intégrales pour les comparer.

▷

Remarque 10.2.11 (Comment ne pas s'embrouiller dans les bornes)

Dans l'intégrale de gauche, les bornes sont pour la variable x , dans celle de droite, elles sont pour la variable t . On passe de la variable t à la variable x en appliquant u : il en est de même pour les bornes : les bornes pour la variable x sont obtenues en appliquant u aux bornes pour la variable t .

Remarques 10.2.12

1. Si u est bijective, on peut écrire : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u'(t) dt$.
2. Cette formule peut s'utiliser dans les deux sens, comme le montre l'exemple suivant.

Exemples 10.2.13

1. $\int_2^3 \frac{4t^3}{1-t^8} dt$
2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

II.3 Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes

Le théorème fondamental du calcul des intégrales permet également l'étude de fonctions définies à l'aide d'intégrales, la dépendance s'effectuant au niveau des bornes, via le théorème suivant :

Théorème 10.2.14 (Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes)

Soit I et J deux intervalle Soit u et v deux fonctions de classe C^1 de I dans J , et soit f une fonction continue sur J . Soit G la fonction définie par : $\forall x \in I, G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.
Alors G est de classe C^1 sur I , et : $\forall x \in I, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

◁ **Éléments de preuve.**

Écrire G à l'aide d'une primitive F de f , puis dériver. ▷

Le théorème fondamental du calcul des intégrales montre l'importance de la notion de primitive pour le calcul des intégrales, la capacité à calculer une intégrale étant fortement liée à la capacité de trouver une primitive. Il est donc indispensable de reconnaître rapidement les fonctions que l'on sait primitiver directement. Une telle habitude est aussi indispensable pour exploiter correctement la méthode de l'intégration par parties. Une bonne connaissance du tableau des primitives, et une pratique régulière de la primitivation et de l'intégration sont donc nécessaires.

II.4 Conséquences pour les fonctions admettant des symétries

On donne trois conséquences importantes du théorème de changement de variable, et du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes, pour le calcul d'intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques.

Proposition 10.2.15 (Intégrale d'une fonction impaire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et impaire sur I . Alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Changement de variable $y = -x$. ▷

Proposition 10.2.16 (Intégrale d'une fonction paire)

Soit $I = [-a, a]$ et f une fonction continue et paire sur I . Alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Couper en 2 en 0 (par la relation de Chasles), et faire le changement de variable $y = -x$ sur l'intégrale sur $[-a, 0]$. ▷

Proposition 10.2.17 (Intégrale d'une fonction périodique)

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , périodique de période $T > 0$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dériver par rapport à a . ▷

Ainsi, l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas du choix de la période.

III Rapide introduction aux intégrales impropres

Il est très fréquent de considérer l'intégrale d'une fonction, sur un intervalle sur lequel f n'est pas continue partout. Le cas le plus fréquent est le cas d'une fonction continue sur $]a, b[$ ou $[a, b[$, ou $]a, b[$, les bornes ouvertes pouvant être des infinis. Si f est discontinue en un nombre fini de points, on peut se ramener à ces situations en coupant l'intervalle en morceaux, et même aux deux premiers cas, en coupant encore en 2. Nous allons donc rapidement évoquer les intégrales de fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$.

Définition 10.3.1 (Convergence d'intégrales impropres)

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, b pouvant être infini. On dit que l'intégrale (impropre) $\int_a^b f(t) \, dt$ converge si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt,$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^- . On note alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) \, dt.$$

Nous donnons ci-dessous quelques outils efficaces pour justifier la convergence d'une intégrale

Théorème 10.3.2 (Théorème de comparaison pour la convergence des intégrales)

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$, telles que $f \leq g$ sur $[a, b[$. Si $\int_a^b g(t) \, dt$ converge, il en est de même de $\int_a^b f(t) \, dt$.

Des conséquences immédiates en sont :

Corollaire 10.3.3 (Convergence absolue)

Soit f continue sur $[a, b[$. Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, alors également $\int_a^b f(t) dt$. On dit dans ce cas que l'intégrale est absolument convergente, ou que f est intégrable sur $[a, b[$.

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer par inégalité la convergence de $\int f^+$ et $\int f^-$, intégrale des parties positive et négative de f . ▷

Avertissement 10.3.4

La notion d'intégrabilité est une notion liée à la convergence ABSOLUE.

Corollaire 10.3.5 (Autres théorèmes de comparaison)

Soient f et g deux fonctions continues **et positives** sur $[a, b[$.

- Si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de b (on écrit $f = O(g)$, on dit que f est dominée par g au voisinage de b) et si $\int_a^b g$ converge absolument, alors il en est de même de $\int_a^b f$.
- C'est le cas en particulier si $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ en b (on écrit $f = o(g)$, on dit que f est négligeable devant g en b).
- Si $\frac{f}{g} \rightarrow 1$ en b (on dit que f et g sont équivalentes, et on note $f \sim_b g$), alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

On fera attention aux intégrations par parties (les propriétés de convergence ne sont conservées que si le produit $f g$ converge) et aux changements de variable (qui peuvent se faire sur l'intégrale impropre, mais sous des conditions un peu plus forte de bijectivité de la fonction donnant le changement de variable). Il est pour le moment préférable de faire les intégrations par parties et les changements de variable sur les intégrales partielles, puis de faire tendre la borne supérieure.

Équations différentielles linéaires

Ce chapitre a vocation à justifier les techniques de résolution des équations différentielles, admises en physique. Nous nous limitons à l'étude de certaines équations différentielles linéaires. Les autres types ne peuvent en général pas se résoudre explicitement, à moins de pouvoir se ramener à des équations différentielles linéaires. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles, mais la problématique de résolution explicite qui nous occupe dans ce chapitre est absente dans ce contexte. Les fonctions considérées peuvent être à valeurs réelles ou complexes. On notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} suivant la situation.

I Équations différentielles linéaires

Définition 11.1.1 (Équation différentielle linéaire)

Une équation différentielle linéaire d'ordre r d'une fonction inconnue y est une équation différentielle de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x),$$

où a_r n'est pas la fonction nulle, et les a_i sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes, et y une fonction définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R} (souvent à déterminer), à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On définit de la même manière une équation différentielle linéaire d'ordre r de plusieurs variables y_1, \dots, y_p comme une relation affine à coefficients fonctionnels entre les dérivées des y_i jusqu'à l'ordre r (au moins l'un des coefficients d'un des termes d'ordre r étant non nul).

On définit aussi les systèmes d'équations linéaires.

On étudie de façon directe le cas d'équations linéaires d'ordres 1 et 2, mais auparavant, on se sert de la description générale pour donner un résultat de structure de l'ensemble des solutions.

Théorème 11.1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit $(E) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = b(x)$ une équation différentielle linéaire à résoudre sur un intervalle I .

S'il n'est pas vide, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0,$$

où :

- \mathcal{S}_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

$$(EH) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_r(x)y^{(r)} = 0;$$

- y_0 est une solution particulière.

De plus, \mathcal{S}_0 est non vide et stable par combinaison linéaire.

On dit que \mathcal{S}_0 est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I) et que \mathcal{S} est un sous-espace affine de \mathbb{R}^I dirigé par \mathcal{S}_0 .

◁ Éléments de preuve.

Par linéarité de la dérivation, justifier que y vérifie (E) ssi $y - y_0$ vérifie (EH). ▷

La recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps, si b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Proposition 11.1.3 (Principe de superposition)

Si $b = b_1 + b_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation (E), il suffit de trouver :

- une solution particulière y_1 de $(E_1) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_r(x)y^{(r)} = b_1(x)$
- une solution particulière y_2 de $(E_2) : a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_r(x)y^{(r)} = b_2(x)$.

Une solution particulière de (E) est alors $y_1 + y_2$.

◁ Éléments de preuve.

Vérification facile, par linéarité de la dérivation. ▷

II Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II.1 Situation

Nous nous intéressons ici aux équations linéaires d'ordre 1 sur un intervalle I , dont la forme générale est : $a_1(x)y' + a_0(x)y = \beta(x)$, où a_0 et a_1 sont des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{R} .

On se restreint ici au cas où la fonction a_1 ne s'annule pas sur l'intervalle I considéré, et où les fonctions a_1 , a_0 et β sont continues, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Ainsi, en divisant par a_1 et en isolant le terme y' , on est ramené à une équation « sous forme normale » : $y' = a(x)y + b(x)$, où a et b sont continues à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nous allons étudier l'ensemble des solutions d'une équation de ce type, à l'aide de deux « quadratures » (c'est-à-dire deux primitives). Les méthodes mises en oeuvre sont à connaître, car ce sont elles qui vous permettront de résoudre explicitement une équation différentielle.

Au passage, cette étude nous permettra de constater que le théorème de Cauchy-Lipschitz est bien valide dans cette situation : ce théorème affirme, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution, vérifiant des conditions initiales données.

Le théorème de structure et le théorème de superposition s'appliquent à cette situation. On peut donc se contenter d'étudier l'équation homogène, et de trouver une solution particulière.

II.2 Solutions de l'équation homogène

Théorème 11.2.1 (Résolution de l'équation $y' = a(x)y$ (a continue))

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$ est :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto Ce^{A(x)}\},$$

où A est une primitive de la fonction (continue) a , et C est une constante.

◁ Éléments de preuve.

Poser $z(x) = y(x)e^{-A(x)}$ et dériver z . ▷

Remarque 11.2.2 (Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée)

- Au brouillon, on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!) L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.
- On reconnaît en $\frac{y'}{y}$ la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y). On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
- Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y .

Exemples 11.2.3

1. Résolution de $y' = ay$ (a constant)
2. Résolution de $y' = yx^\alpha$ sur \mathbb{R} si $\alpha \geq 0$, sur \mathbb{R}_+^* sinon.

II.3 Recherche d'une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$

Pour commencer, fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le principe de superposition énoncé plus haut. On suppose cette première étape effectuée, et on cherche une solution particulière de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$.

En premier lieu, essayez de DEVINER une solution particulière. Vous pouvez par exemple pour cela vous aider de l'homogénéité. Vous pouvez aussi rechercher une solution constante ou polynomiale.

Mais n'y perdez pas trop de temps : s'il n'y a pas de solution évidente qui vous saute aux yeux, voici une méthode efficace pour trouver une solution particulière (au moins sous forme intégrale) à partir d'une solution de l'équation homogène :

Méthode 11.2.4 (Méthode de variation de la constante)

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto Ce^{A(x)}$, on recherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $x \mapsto C(x)e^{A(x)}$ (on « rend la constante variable »)
2. En remplaçant dans l'équation différentielle, $x \mapsto C(x)$ s'obtient par primitivation.

Exemples 11.2.5

1. Résoudre $y' = 2y + \sin(x) + e^x + x$ sur \mathbb{R}
2. Résoudre $y' = -\frac{y}{x} + \text{Arctan}(x)$ sur \mathbb{R}_+^*

Remarque 11.2.6

Comme dit plus haut, et j'insiste dessus, il n'est pas toujours nécessaire d'employer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière : parfois elle est suffisamment évidente pour être devinée.

Exemples 11.2.7

1. Si a et b sont constants, la fonction constante égale à $-\frac{b}{a}$ est solution de $y' = ay + b$.
2. La fonction $y : x \mapsto ce^{\alpha x}$ est solution de $y' = ay + be^{\alpha x}$, où c vérifie l'équation $\alpha c = ac + b$.

II.4 Problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre

Nous pouvons maintenant résoudre le problème de Cauchy associé à une EDL du premier ordre :

Théorème 11.2.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1)

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et \mathcal{S} l'ensemble des solutions à valeurs dans \mathbb{K} de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$. Soit x_0 un élément de I . Alors il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle telle que $y(x_0) = y_0$.

◁ Éléments de preuve.

Résoudre sous forme intégrale, et voir quelle condition sur les coefficients inconnues impose $y(x_0) = y_0$. ▷

II.5 Problèmes de raccordement (ou recollement)

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, on se ramène à la situation précédente en divisant par $a(x)$. Si a ne s'annule pas sur I , cela ne pose pas de problème. Mais il peut arriver que a s'annule.

Si par exemple a s'annule en un nombre fini de points $x_1 < \dots < x_n$, cela définit des intervalles I_1, I_2, \dots, I_{n+1} ouverts en x_1, \dots, x_n , et dont l'union fait $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

On peut résoudre l'équation sur chaque intervalle selon la méthode précédente, puis essayer de prolonger les fonctions obtenues sur chaque intervalle, en définissant des valeurs adéquates en x_1, \dots, x_n . Ainsi, la solution générale sur I s'obtiendra en raccordant des solutions sur chaque I_k selon des valeurs de $y(x_k)$. Pour qu'on puisse affirmer qu'on obtient ainsi une solution de l'équation différentielle sur I tout entier, la fonction que l'on cherche à définir sur I entier doit être dérivable sur I (pour que l'ED ait un sens, même si $a(x)$ s'annule en un des points particulier), donc en particulier, elle doit être continue. Il faut donc procéder de la façon suivante :

- Raccorder les solutions par continuité aux points x_i . Ainsi, les deux branches à raccorder en x_i doivent avoir même limite pour que ce soit possible. Cela contraint souvent les constantes laissées indéterminées lors de la résolution de l'ED.
- Vérifier que la fonction ainsi obtenue par prolongement par continuité est dérivable aux points de raccordement et que sa dérivée vérifie bien l'ED.

Exemple 11.2.9

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{|x|}y' = y$
2. $xy' = y$.

II.6 Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Du fait de son importance pratique, on isole dans le résultat suivant la résolution complète du cas d'une équation $y = ay + b$ dans le cas où a et b sont constants (réels ou complexes). Ce théorème est un corollaire immédiat des résultats des sections précédentes.

Théorème 11.2.10 (Résolution d'une équation linéaire $y' = ay + b$ à coefficients constants)

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{K} \right\},$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \mapsto \left(\frac{b}{a} + y_0 \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Application simple du théorème général.

▷

III Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

III.1 Position du problème

L'outil matriciel permet de se ramener à une équation différentielle matricielle d'ordre 1 (en introduisant comme nouvelles fonctions la dérivée de y), qui s'étudie comme plus haut, mais nécessite quelques connaissances supplémentaires sur le calcul matriciel (notamment la définition de l'exponentielle de matrices).

En attendant d'avoir ces outils, nous nous contentons d'une étude dans un cas beaucoup moins général, celui où tous les coefficients de l'équation sont constants, dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Par commodité, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , selon le contexte dans lequel on se place, pour éviter d'avoir à distinguer les deux cas dans les énoncés. Si le coefficient du terme en y'' est nul, on est ramené à l'étude d'une équation d'ordre 1. On peut donc supposer que ce coefficient est non nul, et en divisant l'équation par ce coefficient, on est ramené à l'étude d'une équation de la forme suivante :

$$y'' + ay' + by = f(x) \text{ où } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } f \text{ continue à valeurs dans } \mathbb{K}.$$

Dans cette situation encore, on peut :

1. utiliser le théorème de structure de l'ensemble des solutions, qui nous dit qu'on peut se contenter de la résolution du système homogène $y'' + ax + by = 0$, et de la recherche d'une solution particulière
2. utiliser le principe de superposition pour ramener la recherche des solutions particulières au cas de fonctions f les plus simples possibles.

III.2 Résolution de l'équation homogène

La méthode ci-dessous est importante en soi, même si l'utilisation directe du théorème qu'on en déduit est plus efficace. Cependant, le deuxième point de cette méthode se généralise au cas d'équations linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants, à condition d'avoir réussi à trouver une solution particulière de l'équation homogène (ce qui constitue alors souvent le point délicat de la résolution). C'est une situation plus générale s'adaptant au cas d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients quelconques, homogènes ou non.

Méthode 11.3.1 (Recherche des solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, en connaissant une solution de l'équation homogène)

- Soit y_0 une solution particulière de l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. On pose $y = y_0z$ (changement de fonction ; remarquez qu'il s'agit encore d'une variation de constante, puisque Ky_0 est solution).
- Vérifier que z vérifie l'équation (en tout point en lequel y_0 ne s'annule pas) :

$$2y_0'z' + y_0z'' + ay_0z' = f(x).$$

- Résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 d'inconnue z' et primitiver encore pour obtenir z . Comme il y a deux quadratures, on obtient deux paramètres sur chaque intervalle : l'espace des solutions est de dimension 2.
- Attention aux éventuels raccordements à faire si y_0 s'annule.

Exemples 11.3.2

- Il peut arriver qu'une solution soit évidente, mais pas les autres. La méthode ci-dessus est adaptée dans ce cas.
- Si les coefficients a et b sont polynomiaux, on peut espérer trouver une solution polynomiale (ce n'est pas systématiquement possible). Essayer de déterminer *a priori* le degré du polynôme par un argument sur le coefficient dominant, puis écrire l'ED avec les coefficients du polynôme à déterminer. On trouve alors l'ensemble de toutes les solutions par la méthode ci-dessus.

On obtient, par application de cette méthode, en recherchant d'abord une solution exponentielle :

Théorème 11.3.3

Soit a et b des nombres complexes. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto ce^{r_1x} + de^{r_2x}\} & \text{si } \Delta \neq 0 \\ \mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto (c + dx)e^{rx}\} & \text{si } \Delta = 0, \end{cases}$$

où Δ est le discriminant du polynôme $X^2 + aX + b$, et où r_1 et r_2 sont les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme (notée simplement r , en cas de racine double).

Terminologie 11.3.4 (polynôme caractéristique)

Le polynôme $X^2 + aX + b$ est appelé *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Remarques 11.3.5

1. Si $\Delta \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisque l'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire). La deuxième étape sert dans ce cas seulement à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
2. Dans le cas où $\Delta = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir. La méthode trouve là toute sa pertinence.
3. La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour des coefficients variables, à partir du moment où on connaît une solution particulière.

Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta < 0$). La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. Voici un résultat permettant de retrouver facilement l'ensemble des solutions à valeurs réelles

Proposition 11.3.6 (Passer des solutions complexes aux solutions réelles)

Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels. Soit $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ l'ensemble de toutes ses solutions à valeurs complexes et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs réelles. Alors :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\operatorname{Re}(y) \mid y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par double-inclusion :

- Par définition de la dérivation de fonctions à valeurs complexes, si y est solution, $\text{Re}(y)$ aussi, et est à valeurs réelles.
- Une solution réelle est aussi dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et est partie réelle d'elle-même.

▷

On obtient alors :

Théorème 11.3.7 (Expression des solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$)

Soit Δ le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b = 0$ et r_1 et r_2 ses racines réelles ou complexes ($r = r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$). Alors, l'ensemble des solutions réelles est :

- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto ce^{r_1x} + de^{r_2x} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta > 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (cx + d)e^{rx} \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta = 0$;
- $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto e^{\alpha x} (c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)) \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta < 0$,
où α et ω sont tels que $r_1 = \alpha - i\omega$ et $r_2 = \alpha + i\omega$.

Dans le cas où $\Delta < 0$, la valeur de α est unique, mais ω n'est unique qu'au signe près. On peut par exemple choisir :

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

On peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\omega x - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\Delta < 0),$$

ou encore :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto Ae^{\alpha(x-x_0)} \cos(\omega(x-x_0) - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad (\Delta < 0),$$

forme qui peut être plus adaptée si les conditions initiales sont données en x_0 (vous pouvez réexprimer de même les autres cas).

III.3 Problème de Cauchy

La résolution du problème de Cauchy ne pose désormais plus de problème.

Théorème 11.3.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y'' + ay' + by = 0$, a, b réels)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe une unique solution y de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

◁ **Éléments de preuve.**

Étudier les 3 cas possibles.

▷

III.4 Solution générale du système non homogène

Comme pour le cas d'EDL de degré 1, la première étape est l'utilisation du principe de superposition pour se ramener à des études plus simples.

Pour les EDL d'ordre 1, comme dans le cas des équations d'ordre 1, il existe une méthode dite « de variation des constantes » pour trouver une solution particulière, mais elle est plus délicate à mettre en oeuvre. Comme elle n'est pas au programme, nous nous limitons à l'étude de cas particuliers intervenant souvent en physique.

Méthode 11.3.9

Recherche de solutions particulières de $y'' + ay' + by = f(x)$ lorsque $f(x) = Q(x)e^{\lambda x}$, $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Cas particuliers :

- $f(x) = Ae^{\lambda x}$
- $f(x) = Ax^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[X]$
- $f(x) = B \cos(\omega x)$ et plus généralement $f(x) = Be^{\lambda x} \cos(\omega x)$ ($B, \lambda, \omega \in \mathbb{R}$)
- $f(x) = B \sin(\omega x)$ et plus généralement $f(x) = Be^{\lambda x} \sin(\omega x)$ ($B, \lambda, \omega \in \mathbb{R}$)

On retiendra :

Proposition 11.3.10 (Solutions particulières pour un second membre $Q(x)e^{\lambda x}$.)

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, et l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = Q(x)e^{\lambda x}$. Soit P le polynôme caractéristique de l'équation (E) , et m la multiplicité de λ comme racine de P . Alors, il existe une solution particulière de (E) de la forme :

$$y_P(x) = x^m R(x),$$

où R est un polynôme de même degré que Q . Ce résultat reste valide pour des équations d'ordre plus important.

Suites numériques

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et que l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

(Euclide)

L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée

(Gottfried Wilhelm Leibniz)

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

(Augustin Louis Cauchy)

Nous rappelons :

Définition 12.0.1 (Suite numérique)

Une suite numérique (réelle ou complexe) est une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R} ou \mathbb{C} indexée sur \mathbb{N} (parfois sur \mathbb{N}^* , ou sur $\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n_0 - 1\}$). Il s'agit donc d'une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Convergence de suites

I.1 Un peu d'histoire

Note Historique 12.1.1

- L'appréhension de la notion de limite d'une suite est ancienne. On trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide (citation ci-dessus).

Traduisons cette citation en langage mathématique : pour tout $(\varepsilon, a) \in \mathbb{R}_+^*$ (une grandeur est toujours strictement positive pour les grecs), si (u_n) est une suite (strictement positive pour la même raison) telle que pour tout n , $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$, alors (en sous-entendant « à un moment, il restera... »), il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < \varepsilon$.

C'est exactement dire (en langage moderne) que la suite (u_n) (qui est sous-géométrique de raison 2) converge vers 0...

- Archimède également utilise intuitivement une limite, lorsqu'il calcule une valeur approchée de π en approchant le cercle par des polygones réguliers dont il calcule la circonférence.
- Au 17-ième siècle, même si la notion de limite semble assez claire, elle n'est pas bien définie, et tous les arguments de convergence sont expliqués qualitativement, avec assez peu de rigueur, comme le montre la citation de Leibniz en 1682, pour justifier l'égalité $\pi = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$.
- Il faut attendre Augustin Louis baron Cauchy pour avoir une définition précise (mais pas encore énoncée mathématiquement) de la limite, donnée dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821). Cauchy définit ce qu'on appelle maintenant les suites de Cauchy, permettant d'étudier (dans \mathbb{R}) la convergence de suites sans en connaître la limite. Le *Cours d'Analyse* a été pour Cauchy l'occasion d'apporter rigueur et clarification à un grand nombre de notions jusque-là utilisées intuitivement. Dans ce sens, cet ouvrage a eu une importance capitale dans l'évolution de l'analyse.
- Il faut attendre la deuxième moitié du 19^e siècle pour voir naître la définition moderne (énoncée mathématiquement) de la limite, grâce à Karl Weierstrass, à qui on doit également toutes les définitions similaires relatives aux limites et à la continuité des fonctions.

I.2 Définition de la limite d'une suite

Intuitivement, une suite admet une limite ℓ si ses termes s'en approchent aussi près qu'on veut, sans plus s'en éloigner, donc si, quitte à prendre n suffisamment grand, u_n est une approximation aussi fine que l'on souhaite de ℓ . Nous formalisons cette définition de la sorte :

Définition 12.1.2 (limite d'une suite, convergence, divergence)

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun ℓ de \mathbb{K} comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (dans \mathbb{K}).

Remarque 12.1.3

Comme nous l'avons vu dans un chapitre antérieur, cette définition est un cas particulier de la notion générale de limite d'une fonction. Il s'agit ici d'étudier la limite en $+\infty$ d'une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{K} .

De même que dans le contexte général des limites de fonctions, cette définition est valable dans un contexte plus général : elle permet de définir la convergence d'une suite à valeurs dans n'importe quel espace métrique. En particulier, cela nous permet de parler de convergence de suites de vecteurs de \mathbb{R}^n , la distance considérée étant la distance euclidienne canonique (ou n'importe quelle distance définie à l'aide d'une norme ; en effet, vous montrerez l'an prochain qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui signifie plus ou moins qu'elles définissent les mêmes propriétés de convergence).

Comme dans la situation générale, on dispose de plusieurs caractérisations (réexpression par ε de la caractérisation métrique, et caractérisation topologique qui permet de généraliser la notion de convergence pour des suites à valeur dans un espace topologique).

Proposition 12.1.4 (Diverses caractérisations de la convergence)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$;
- (iii) pour tout voisinage V de ℓ , il existe N tel que pour tout $n \geq N, u_n \in V$.

◁ **Éléments de preuve.**

Cela a déjà été vu dans le contexte plus général des limites de fonctions. On en rappelle rapidement les arguments :

- (i) \implies (ii) : $u_n \in B(x, \varepsilon) \iff |u_n - \ell| < \varepsilon$; Cela donne même l'équivalence entre les deux points.
- (ii) \implies (iii) : V étant un voisinage, il existe ε tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$. Utiliser (ii) avec cet ε .
- (iii) \implies (i) : utiliser (i) avec le voisinage $V = B(x, \varepsilon)$.

▷

Comme dans le cas des limites de fonctions, hormis pour l'inégalité $\varepsilon > 0$, on peut considérer indifféremment des inégalités strictes ou larges.

Nous nous plaçons désormais, par pure commodité, dans le cas de suites réelles. La plupart des résultats se généralisent au cas de suites complexes.

Dans le cas d'une suite réelle, on peut également définir une convergence vers les deux infinis :

Définition 12.1.5 (Limite $+\infty$ ou $-\infty$ d'une suite réelle)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < A.$$

On remarquera qu'une suite tendant vers $+\infty$ est divergente dans \mathbb{R} , mais convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, suivant le point de vue, on pourra parler de divergence ou de convergence. En particulier, on rencontre aussi bien l'expression « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ » que « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ». Pour éviter toute controverse, on peut se contenter de dire : « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ », ou encore « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ ».

Avertissement 12.1.6

Il existe des suites n'admettant pas de limite, même dans $\overline{\mathbb{R}}$! Par exemple $(-1)^n$. Attention à ne pas dire que cette suite admet deux limites 1 et -1 (confusion limite / valeur d'adhérence).

En effet, comme cas particulier d'un résultat vu pour les fonctions :

Théorème 12.1.7 (Unicité de la limite)

La limite d'une suite réelle ou complexe, si elle existe (dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans \mathbb{C}), est unique.

On a déjà vu qu'en définissant un voisinage $V \subset \mathbb{R}$ de $+\infty$ comme étant un sous-ensemble de \mathbb{R} tel qu'il existe a vérifiant $]a, +\infty[\subset V$, la caractérisation des limites par les voisinages permet d'unifier les définitions relatives aux limites finies et infinies :

Proposition 12.1.8 (Caractérisation par voisinage pour les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite ℓ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in V$.

◁ **Éléments de preuve.**

L'équivalence est déjà prouvée dans le cas d'une limite finie. Dans le cas d'une limite $+\infty$, elle provient du fait que tout voisinage de $+\infty$ contient un $]A, +\infty[$ et que réciproquement, $]A, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. De même en $-\infty$.

▷

Cette unification du fini et de l'infini permet souvent d'éviter de faire des distinctions de cas dans des démonstrations théoriques.

Définition 12.1.9 (Suite stationnaire)

Une suite (u_n) est dite stationnaire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n = u_N$.

Une suite stationnaire est toujours convergente (vers sa valeur de stationnement). La réciproque est bien sûr fautive, comme le montre l'exemple de la suite $(\frac{1}{n})$.

Il est une situation dans laquelle on peut tout de même obtenir cette réciproque (mais attention à ne pas l'utiliser hors de ce cadre!)

Proposition 12.1.10 (Suites stationnaires à valeurs entières)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{Z} . La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

◁ **Éléments de preuve.**

Réciproque évidente. Sens direct : considérer $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Il ne peut y avoir qu'un entier dans la boule $B(\ell, \varepsilon)$. ▷

I.3 Cas des suites complexes et vectorielles

Comme cas particulier du théorème similaire pour les fonctions :

Proposition 12.1.11 (Caractérisation de la convergence d'une suite complexe)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{C} si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent dans \mathbb{R} , et dans ce cas :

$$\lim u_n = \lim \operatorname{Re}(u_n) + i \lim \operatorname{Im}(u_n).$$

Plus généralement :

Proposition 12.1.12 (Caractérisation de la convergence d'une suite de vecteurs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^p . On note pour tout n , $\begin{pmatrix} u_{n,1} \\ \vdots \\ u_{n,p} \end{pmatrix}$ les coordonnées de u_n .

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^p si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} . Dans ce cas :

$$\lim u_n = \begin{pmatrix} \lim u_{n,1} \\ \vdots \\ \lim u_{n,p} \end{pmatrix}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

De même que dans \mathbb{C} , en utilisant le fait que si $X = (x_1, \dots, x_p)$, pour la norme euclidienne canonique, $|x_i| \leq \|X\|$, et réciproquement, par IT, $\|X\| \leq |x_1| + \dots + |x_p|$.

Cela reste vrai pour toute autre norme, en utilisant un résultat que vous verrez l'année prochaine (équivalence des normes en dimension finie). ▷

Ainsi, la convergence d'un vecteur équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée. Là aussi, cela nous assure l'unicité de cette limite, sous réserve d'existence.

I.4 Premières propriétés des suites convergentes

Une propriété bien utile, notamment pour l'étude de suites récurrentes :

Proposition 12.1.13 (Limite d'un translaté)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ , alors $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi.

◁ Éléments de preuve.

Par voisinage. Si N convient pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $N + 1$ convient pour (u_{n-1}) . ▷

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(u_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n-k})_{n \geq k}$ convergent alors vers ℓ .

Proposition 12.1.14

Toute suite convergente (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , mais pas $\overline{\mathbb{R}}$) est bornée.

◁ Éléments de preuve.

À partir d'un certain rang, tous les termes restent dans une boule $B(\ell, 1)$. Les autres termes sont en nombre fini. ▷

Enfin, en ne considérant que la moitié des inégalités présentes dans la définition, on obtient, dans le cas de suites réelles, la propriété suivante parfois plus simple à utiliser que la définition. Attention, comme on oublie ici la moitié des inégalités, chaque point de cette propriété est moins fort que la définition. La conjonction des deux points équivaut à la définition.

Proposition 12.1.15 (Comparaison de (u_n) à un minorant strict de sa limite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- Pour tout $\ell' < \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > \ell'$.
- Pour tout $\ell'' > \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < \ell''$.

◁ Éléments de preuve.

Considérer $]\ell', +\infty[$, voisinage de ℓ (aussi bien dans le cas fini que dans le cas infini).

Dans le cas où ℓ est fini, on peut aussi considérer $\varepsilon = \ell - \ell'$. ▷

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ , alors (u_n) finit par dépasser n'importe quelle valeur $\ell' < \ell$, et de même, (u_n) finit par passer sous n'importe quelle valeur $\ell'' > \ell$.

Avertissement 12.1.16

Ce n'est évidemment pas vrai si $\ell' = \ell$. Une suite n'est pas forcément majorée (ou minorée) par sa limite. Elle peut tendre vers sa limite en faisant de petites oscillations, comme la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par exemple.

I.5 Suites de Cauchy (hors-programme)

L'étude de la convergence d'une suite par l'utilisation de la définition de la limite nécessite la connaissance préalable de la limite ℓ . Dans certaine situation, on ne peut pas accéder à cette connaissance. Augustin Cauchy, dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* donne un critère de convergence n'utilisant pas la valeur de la limite.

Définition 12.1.17 (Suite de Cauchy, HP)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \geq n \geq N \implies |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

Lemme 12.1.18 (Convergence implique Cauchy, HP)

Toute suite convergente dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} est de Cauchy. Ceci est vrai dans tout espace métrique.

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in B(\ell, \frac{\varepsilon}{2})$. ▷

La réciproque est parfois vraie. Elle est par exemple vraie pour des suites à valeurs réelles :

Théorème 12.1.19 (Complétude de \mathbb{R} , HP)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

◁ **Éléments de preuve.**

Une première démonstration, pas la plus simple :

Considérer $\ell = \inf_{N \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq N} u_n$. Majorer $|u_n - \ell|$ en 3 temps : trouver un N_0 tel que $\sup_{n \geq N_0} u_n$ reste proche de ℓ , puis un n_0 , tel que u_{n_0} approche cette quantité, puis par Cauchy, u_n reste alors proche de u_{n_0} pour n assez grand. Cela impose que n_0 soit assez grand, ce qu'il est possible de faire car N_0 peut être choisi aussi grand qu'on veut, (mais il faut savoir à ce moment à quel point grand on le veut, et il faut donc exprimer le critère de Cauchy dès ce choix). ▷

Note Historique 12.1.20

Initialement, Cauchy donne cette définition de la convergence. Mais elle n'est pas satisfaisante, car si elle convient dans \mathbb{R} (et également dans \mathbb{C}), elle n'est pas correcte dans \mathbb{Q} (voir proposition ci-dessous). C'est pour cela qu'à la fin du 19^e siècle, on a adopté la définition actuelle, due à Weierstass.

Proposition 12.1.21 (\mathbb{Q} n'est pas complet, HP)

Il existe des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui sont de Cauchy, mais non convergentes dans \mathbb{Q} .

◁ **Éléments de preuve.**

Trouvez une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel. ▷

Cela motive la définition suivante :

Définition 12.1.22 (Espace complet, HP)

Soit E un espace métrique (sur lequel on peut donc définir une notion de convergence, et également une notion de suites de Cauchy). On dit que E est complet si et seulement si toutes les suites de Cauchy sont convergentes dans E (la réciproque étant toujours vraie).

Ainsi, ce qui précède montre que \mathbb{R} est complet, alors que \mathbb{Q} n'est pas complet. C'est même là une façon de construire \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} , sans doute la plus employée : on « complète » \mathbb{Q} en lui ajoutant des limites fictives de toutes ses suites de Cauchy. On dit que \mathbb{R} est la complétion de \mathbb{Q} . On y reviendra un peu plus loin.

La complétude de \mathbb{R} implique celle de \mathbb{C} :

Théorème 12.1.23 (Complétude de \mathbb{C})

\mathbb{C} est complet.

◁ **Éléments de preuve.**

Si la suite complexe (u_n) est de Cauchy, ses parties réelle et imaginaire aussi, donc elles sont convergentes. ▷

Sans autre argument à donner, on obtient de même le fait que \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne canonique est complet, et par équivalence des normes en dimension fini, cela reste vrai quelle que soit la norme considérée sur \mathbb{R}^n .

II Propriétés des suites liées à la convergence**II.1 Préambule : caractérisation séquentielle de la limite**

Nous commençons par un résultat théorique, qui nous permettra de convertir tous les résultats qu'on obtiendra sur les limites de suites en des résultats similaires sur les limites des fonctions.

Théorème 12.2.1 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} , $f : X \mapsto \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), et $a \in \overline{X}$. Alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si pour toute suite (u_n) à valeurs dans X et telle que $u_n \rightarrow a$, on a $f(u_n) \rightarrow \ell$.

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : étant donné un voisinage V de ℓ , trouver un voisinage U de a exprimant la limite de f , puis appliquer la définition topologique de la limite de u_n avec ce voisinage U .
- Sens réciproque : par la contraposée, supposer que f n'admet pas la limite ℓ en a . L'exprimer par quantifications (en niant la définition topologique de la limite), en déduire une construction d'une suite $u_n \rightarrow a$, telle que $f(u_n)$ reste hors d'un certain voisinage contenant ℓ (coller u_n à a en choisissant des voisinages collant de plus en plus à a).

▷

En particulier, en considérant $\ell = f(a)$, on obtient :

Théorème 12.2.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} , $f : X \mapsto \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), et $a \in X$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) à valeurs dans X et telle que $u_n \rightarrow a$, on a $f(u_n) \rightarrow f(a)$.

Remarque 12.2.3

Ces caractérisations séquentielles, outre leur utilisation théorique pour transférer les propriétés des limites de suites aux fonctions, sont souvent utilisées pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite. Il suffit pour cela :

- soit de trouver $u_n \rightarrow a$ telle que $f(u_n)$ n'a pas de limite ;
- soit de trouver $u_n, v_n \rightarrow a$ telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ont des limites différentes.

Exemple 12.2.4

- Montrer que $x \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$
- Montrer que $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

II.2 Opérations sur les limites

Nous montrons maintenant sur les suites les différentes propriétés qu'on avait admises sur les limites de fonctions. La caractérisation séquentielle permet de faire le lien entre les deux.

Théorème 12.2.5 (Opérations sur les limites finies)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes convergentes, et λ et μ deux scalaires (réels ou complexes). Alors :

1. $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim |u_n| = |\lim u_n|$;
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$;
3. $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$;
4. si $\lim v_n \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ; ainsi, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

◁ Éléments de preuve.

1. Utiliser l'IT pour majorer $||u_n| - |\ell||$.
2. Par commodité on peut étudier séparément la somme (couper ε en 2, en en réservant la moitié pour chaque suite) et la multiplication par un scalaire (considérer $\frac{\varepsilon}{\lambda}$; que dire si $\lambda = 0$?).
3. Écrire $u_n v_n - \ell \ell' = u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell')$, et utiliser le fait que (u_n) est majorée. S'arranger pour majorer ensuite chaque membre par $\frac{\varepsilon}{2}$ en choisissant convenablement le epsilon de la définition des convergences de (u_n) et (v_n) .
4. D'après 3, on peut se limiter à l'étude de $\frac{1}{v_n}$. Faire la différence avec $\frac{1}{\ell}$, mettre au même dénominateur, et utiliser le fait que $v_n \ell$ est plus grand que $\frac{\ell^2}{2}$ pour n assez grand.

▷

Théorème 12.2.6 (Opérations impliquant des limites infinies)

Dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$a + \infty = +\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = (\text{sg}(a))\infty \text{ (pour } a \neq 0);$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty; \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

◁ Éléments de preuve.

- $a + \infty$: si $u_n \rightarrow a$ fini, (u_n) est bornée. Si M est un majorant de $|u_n|$, considérer $A' = A - M$ dans l'expression de la suite de limite ∞ .
- $\infty + \infty$: La première suite est positive à partir d'un certain rang. Appliquer directement la définition de la limite infinie sur la deuxième.
- $a \cdot \infty$, $a > 0$: Considérer n tel que $u_n > \frac{a}{2}$, puis appliquer la définition de la limite infinie avec $A' = \frac{2A}{a}$. S'adapte dans le cas $a < 0$.
- $+\infty \times +\infty$: de même, en plus simple : la première suite est minorée par 1 à partir d'un certain rang, la deuxième par A . S'adapte aux autres cas de signes.
- $\frac{1}{+\infty}$: Utiliser $A = \frac{1}{\varepsilon}$. S'adapte à $\frac{1}{-\infty}$.

▷

Avertissement 12.2.7 (Formes indéterminées)

En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées (ayez des exemples en tête) :

$$\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Aux règles précédentes, nous ajoutons la suivante :

Proposition 12.2.8 (Produit $0 \times$ borné)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0 et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

◁ **Éléments de preuve.**

Tant qu'on n'a pas le théorème d'encadrement, on revient à ε . Si M est un majorant de $|v_n|$, utiliser $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ pour exprimer la limite de (u_n) . ▷

Les règles relatives à l'exponentiation découlent de la continuité de l'exponentielle, *via* la caractérisation séquentielle de la continuité, ou plutôt ici uniquement de l'implication la plus simple de cette caractérisation.

Proposition 12.2.9 (Passage à la limite pour les puissances)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, (u_n) étant de plus strictement positive. On suppose que $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$, et que $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, 0), (0, 0), (1, +\infty), (1, -\infty)\}$. Alors :

$$u_n^{v_n} \longrightarrow \ell^{\ell'}.$$

Dans cette proposition, les règles d'exponentiation ont été étendues par les opérations suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- $a^{+\infty} = 0$ si $a \in [0, 1[$,
- $a^{+\infty} = +\infty$ si $a \in]1, +\infty]$
- $a^{-\infty} = +\infty$ si $a \in [0, 1[$,
- $a^{-\infty} = 0$ si $a \in]1, +\infty]$,
- $0^b = 0$ si $b \in]0, +\infty]$.

◁ **Éléments de preuve.**

Se ramener au critère séquentielle de la continuité de l'exponentielle et du logarithme, ou de leurs limites aux bords du domaine. ▷

Avertissement 12.2.10 (Formes indéterminées pour les puissances)

On notera les formes indéterminées relatives aux exponentiations :

$$\infty^0, \quad 0^0 \quad \text{et} \quad 1^\infty.$$

Exemple 12.2.11

Trouver des exemples illustrant ces formes indéterminées (se ramener à des formes indéterminées sur des produits)

Théorème 12.2.12 (Opérations sur les limites des fonctions)

Les règles ci-dessus restent valables pour les limites de fonctions en un point fini ou infini.

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel. Le développer sur un cas suffira à se convaincre que cela s'adapte à tous les cas. ▷

II.3 Limites et inégalités

Les suites considérées dans cette section sont réelles. Pour les suites complexes, l'utilisation de résultats de ce type nécessite de séparer les études de la partie réelle et de la partie imaginaire.

Théorème 12.2.13 (Conservation des inégalités larges)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$. Alors, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des limites dans \mathbb{R} , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'absurde, en notant ℓ la limite de (u_n) et ℓ' celle de (v_n) , si $\ell > \ell'$, considérer deux voisinages V et W de ℓ et ℓ' tels que $W < V$ (ie pour tout x de W et y de V , $x < y$). En quoi cela contredit-il les hypothèses ? ▷

Remarque 12.2.14

Avant de passer à la limite dans une inégalité, il faut avoir justifié soigneusement l'existence des limites.

Avertissement 12.2.15

Les inégalités strictes ne se conservent pas !

Exemple 12.2.16

Pour tout $n \geq 1, 0 < \frac{1}{n}$. Passez à la limite...

Théorème 12.2.17 (théorème de convergence par encadrement)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, trois suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi, et

$$\lim v_n = \lim u_n = \lim w_n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Définition de la limite par ε , appliquée à (u_n) et (w_n) , puis trouver N commun aux deux (prendre le plus grand). ▷

Dans le cas d'une limite infinie, on n'a pas besoin d'un encadrement. Suivant l'infini, une majoration ou une minoration suffit (pas besoin de contrôler le côté infini !):

Théorème 12.2.18 (théorème de divergence par minoration ou majoration)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat en appliquant la définition de $u_n \rightarrow +\infty$ (dans le premier cas. ▷

Remarque 12.2.19

Les deux théorèmes ci-dessus donnent l'existence de la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il n'est pas utile de l'avoir justifiée avant. Mais notamment pour le théorème de convergence par encadrement, il faut faire attention à la rédaction, et bien faire ressortir le fait que le théorème donne l'existence de la limite, avant d'écrire l'égalité sur les limites.

Avertissement 12.2.20

Ne surtout jamais présenter le théorème de convergence par encadrement comme un double passage à la limite dans les inégalités (à l'extrême rigueur si on connaît déjà l'existence de toutes les limites, mais c'est maladroit)

Méthode 12.2.21 (Méthode de calcul de limites par majoration/minoration :)

- Si on parvient à trouver une majoration : $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .
- Si on parvient à minorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite de limite $+\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si on parvient à majorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite de limite $-\infty$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exemples 12.2.22

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b a^n = +\infty$ si $a > 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b a^n = 0$ si $|a| < 1$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;

Dans deux des exemples ci-dessus apparait la méthode suivante :

Méthode 12.2.23 (Comparaison à une suite géométrique)

- Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.
- En cas d'existence, notons $\ell = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.
 - * Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
 - * Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]1, \ell[$, donc $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Si (u_n) est de signe constant pour n assez grand, on en déduit sa convergence vers un des deux infinis, sinon, la suite ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.
 - * Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 12.2.24

L'indétermination du cas $\ell = 1$ peut être illustré par les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou par n'importe quelle suite convergeant vers une limite finie non nulle.

Théorème 12.2.25 (Conservation des inégalités et encadrement pour les fonctions)

Les théorèmes de conservation des inégalités et d'encadrement restent valables pour les limites de fonctions (en un point fini ou infini).

◁ **Éléments de preuve.**

C'est toujours le critère séquentiel qui nous permet de passer des suites aux fonctions. Pour la conservation des inégalités, il suffit de considérer une suite (u_n) de limite a (car on a déjà l'existence des limites). Pour le théorème d'encadrement, il faut en revanche considérer toutes les suites $u_n \rightarrow a$, pour obtenir l'existence de la limite par critère séquentiel. ▷

II.4 Suites monotones

Les notions de croissance, décroissance, croissance stricte, décroissance stricte et monotonie, découlent des définitions générales pour les fonctions.

On parlera de suite croissante à partir du rang N si les inégalités ne sont vérifiées qu'à partir du rang N , et de même pour la décroissance.

Une propriété importante des suites monotones, c'est qu'elles sont toujours convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

Théorème 12.2.26 (Théorème de la convergence monotone)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} .
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} .
4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

◁ **Éléments de preuve.**

Dans le premier cas, considérer $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Trouver n_0 tel que u_{n_0} soit proche de ℓ , et utiliser la croissance pour dire que c'est le cas de tout u_n , $n \geq n_0$. ▷

Remarque 12.2.27

Puisque dans le cas d'une suite croissance majorée, $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$, on a, assez logiquement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. De plus, l'inégalité est stricte pour tout $n \in \mathbb{N}$, sauf si la suite est stationnaire.

Les inégalités sont bien sûr inversées pour des suites décroissantes.

Remarque 12.2.28

Ce théorème est faux si on se place dans \mathbb{Q} . Il est donc spécifique à \mathbb{R} . Il pourrait en fait être pris comme axiome de la construction de \mathbb{R} à la place de la propriété de la borne supérieure.

Remarque 12.2.29

Ce théorème est particulièrement utile pour établir la convergence de suites définies par une récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple 12.2.30

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Étudier la convergence de (u_n) .

Théorème 12.2.31 (Limites des fonctions monotones)

Soit f une fonction croissante sur $X \subset \mathbb{R}$. Alors, en tout point a en lesquels ces limites sont envisageables, f admet une limite à gauche, et/ou une limite à droite, et :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

(ou une inégalité simple si l'un des trois termes n'est pas défini).

Adaptation immédiate au cas où f est décroissante.

◁ **Éléments de preuve.**

L'inégalité finale s'obtient bien par conservation des inégalités, une fois l'existence des limites obtenue. Pour l'existence des limites, deux points de vue :

- On peut utiliser le critère séquentiel, en l'adaptant un peu : montrer que pour la limite à gauche, on peut se contenter de considérer uniquement les suites $u_n \rightarrow a$ strictement croissantes. Pour cela, adapter la démonstration en construisant (u_n) par récurrence, non seulement collant à a par bon choix d'un voisinage, mais aussi tel que $u_{n+1} > u_n$. Une fois cette adaptation faite, le résultat est assez immédiat, et découle de la convergence des suites monotones.
- Adapter directement la démonstration du théorème de convergence des suites monotones, en posant, pour une fonction croissante, et dans le cas où les limites sont envisageables :

$$\ell^- = \sup_{x < a} f(x) \quad \text{et} \quad \ell^+ = \inf_{x > a} f(x).$$

▷

II.5 Suites adjacentes**Définition 12.2.32 (Suites adjacentes)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1. l'une est croissante et l'autre décroissante ;
2. $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 12.2.33 (Comparaison de deux suites adjacentes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes (avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, on ne peut pas avoir $v_n - u_n \rightarrow 0$, cette différence étant décroissante.

▷

Théorème 12.2.34 (Théorème des suites adjacentes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$
◁ **Éléments de preuve.**

On se place dans le cas (u_n) croissante, (v_n) décroissante. Alors (u_n) est majorée (par exemple par v_0) et (v_n) est minorée. Utiliser le théorème de convergence des suites monotones, ainsi que la limite de leur différence, pour conclure. ▷

Remarque 12.2.35

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, de limite ℓ , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq |v_n - u_n|$.

Corollaire 12.2.36 (Théorème des intervalles emboîtés)

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, et telle que la longueur des intervalles I_n tend vers 0. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

◁ **Éléments de preuve.**

Les bornes de ces intervalles forment deux suites adjacentes, convergeant vers ℓ . Vérifier que ℓ est l'unique point de l'intersection. ▷

Le théorème des suites adjacentes est notamment utile pour l'étude des « séries alternées », c'est à dire de la limite de sommes $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, où (a_k) est décroissante de limite nulle :

Méthode 12.2.37 (Étude des séries alternées)

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, avec (a_n) décroissante de limite nulle.

- Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
- En déduire qu'elles ont même limite S
- On verra un peu plus loin que cela implique que (S_n) tend vers S .

Cette méthode fournit la convergence, mais pas la valeur. Le résultat obtenu par cette méthode s'appelle « critère spécial de convergence des séries alternées »

Remarque 12.2.38

Le théorème des suites adjacentes n'est pas vrai si on se place dans \mathbb{Q} . Encore une fois, on aurait pu choisir ce résultat comme axiome de la construction de \mathbb{R} .

III Suites extraites

III.1 Définitions

Définition 12.3.1 (Suite extraite, fonction extractrice)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une *suite extraite* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.
2. La fonction φ est appelée *fonction extractrice* de la suite extraite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi formellement, une suite extraite de (u_n) est une composée de $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. En pratique, cela signifie que (v_n) est constitué de termes de (u_n) , dans l'ordre, et sans répétition d'indice.

Exemples 12.3.2

1. Les deux suites extraites des termes d'indice pair et des termes d'indice impair : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (u_{n^2})
3. Pas $(u_{n(n-1)})$

La beauté poétique de la démonstration du lemme suivant nous laisse rêveurs :

Lemme 12.3.3 (Lemme des pics ou lemme du soleil levant)

De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.

◁ Éléments de preuve.

La ligne brisée des points du graphe de la suite (dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$) forme un relief (les pics). L'éclairer par la droite par une lumière rasante (soleil levant). Un pic (ou son sommet) est éclairé s'il n'est caché par aucun autre (strictement) plus grand. S'il existe une infinité de pics éclairés, ils forment une suite décroissante. Sinon, se placer au-delà du dernier pic éclairé, et partir d'un pic, qui sera caché par un autre, lui-même caché par un troisième etc. Ces pics forment une suite croissante. ▷

III.2 Suites extraites et convergence

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Théorème 12.3.4 (Théorème de convergence des suites extraites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans \mathbb{C} . Alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite que (u_n) .

◁ Éléments de preuve.

La stricte croissance de l'extractrice φ montre que pour tout n , $\varphi(n) \geq n$. Le résultat est alors immédiat par la définition de la limite (version topologique pour éviter les discussions). ▷

Avertissement 12.3.5

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite. Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permettent de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).

Le cas le plus important est la possibilité de récupérer la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:

Proposition 12.3.6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} si et seulement si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , et dans ce cas, $\lim u_n = \ell$.

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct déjà acquis. Pour le sens réciproque, considérer $\varepsilon > 0$, N_1 et N_2 provenant de la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , puis définir un rang N adéquat pour (u_n) en fonction de N_1 et N_2 .

▷

Nous pouvons bien sûr adapter la proposition précédente au cas des suites extraites (u_{3n}) , (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) , etc.

On peut formuler un théorème plus général. Intuitivement, pour contrôler tous les termes de (u_n) , il faut que les images des fonctions extractrices des suites extraites auxquelles on limite notre étude recouvrent \mathbb{N} entier (sauf éventuellement un nombre fini de termes). A cela, il faut rajouter une hypothèse de finitude, pour une question d'uniformité du contrôle qu'on a sur les termes de la suite. On obtient l'énoncé suivant, dont la mise en forme précise de la démonstration est laissée à votre discrétion :

Théorème 12.3.7

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des extractrices en nombre fini. S'il existe un rang N tel que $\left(\bigcup_{i=1}^k \text{Im}(\varphi_i) \right) \cap \llbracket N, +\infty[= \llbracket N, +\infty[$, alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $(u_{\varphi_i(n)})$ converge vers ℓ .

La notion de suite extraite est intimement liée à celle de valeur d'adhérence :

Définition 12.3.8 (valeur d'adhérence, Spé)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels (ou complexes). On dit que le réel (ou complexe) x est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite (v_n) de (u_n) telle que $\lim v_n = x$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble de toutes les limites (finies) des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 12.3.9

Si $u_n \rightarrow \ell$, alors ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) et c'est la seule dans $\overline{\mathbb{R}}$.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est une réexpression du théorème de convergence des suites extraites.

▷

On verra plus loin que cette proposition admet une réciproque.

Proposition 12.3.10 (Caractérisation des valeurs d'adhérence)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout voisinage V de a , il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in V$, c'est-à-dire s'il existe un sous-ensemble infini I de \mathbb{N} tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in V$.

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : utiliser la définition topologique de la convergence d'une suite extraite vers a .
- Sens réciproque : construire φ par récurrence, en utilisant des voisinages V_n collant de plus en plus à a (distinguer le cas a fini et a infini). Le fait qu'il existe une infinité de termes u_k dans V_n nous assure l'existence d'un terme avec un indice strictement supérieur à $\varphi(n-1)$. cela nous donne la construction d'une suite extraite convergeant vers a .

▷

Corollaire 12.3.11 (Caractérisation d'une valeur d'adhérence finie)

Soit (u_n) une suite et $a \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) a est valeur d'adhérence de (u_n) ;
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite (u_n) ;
- (iii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

◁ **Éléments de preuve.**

- (i) \implies (ii) : conséquence immédiate de la caractérisation précédente.
- (ii) \implies (i) : utiliser la caractérisation précédente, en remarquant que tout voisinage de a contient un $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.
- (ii) \iff (iii) assez clair.

▷

Corollaire 12.3.12 (Caractérisation d'une valeur d'adhérence infinie)

Soit (u_n) une suite. Alors $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si (u_n) n'est pas majorée.

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : caractérisation précédente avec des voisinages $]A, +\infty[$.
- Sens réciproque : prendre V voisinage de $+\infty$ et $]A, +\infty[\subset V$. Si $]A, +\infty[$ contient un nombre fini de termes de (u_n) , ces valeurs admettent un majorant ; les autres sont majorées par A . Donc (u_n) est majorée.

▷

Avertissement 12.3.13

Une suite peut ne pas avoir de valeur d'adhérence dans \mathbb{R} . Elle en a toujours une dans $\overline{\mathbb{R}}$. On peut montrer que l'unicité de la valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ caractérise la convergence de la suite.

Proposition 12.3.14 (Existence d'une valeur d'adhérence)

Toute suite réelle (u_n) admet une valeur d'adhérence au moins dans $\overline{\mathbb{R}}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le lemme des pics.

▷

Théorème 12.3.15 (Caractérisation de la convergence par les valeurs d'adhérence)

Une suite (u_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct déjà étudié. Sens réciproque : pour tout voisinage V de a (unique valeur d'adhérence), seul un nombre fini de termes de u_n est hors de V (sinon on peut en extraire une suite convergente d'après la proposition précédente, et on obtient une deuxième valeur d'adhérence).

▷

III.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est important, car il donne l'existence d'une valeur d'adhérence non infinie.

Théorème 12.3.16 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est un cas particulier du théorème d'existence d'une valeur d'adhérence, cette valeur d'adhérence étant ici finie.

On peut aussi en faire une démonstration directe, par dichotomie, en partant d'un intervalle $[m, M]$ où $m < M$, et m et M sont un minorant et un majorant de (u_n) . On coupe l'intervalle en 2 en conservant à chaque fois la (ou une) moitié contenant une infinité de termes de la suite (u_n) . Le point limite (existant d'après le théorème des intervalles emboîtés) est alors valeur d'adhérence. ▷

Le cas d'une suite complexe se déduit du cas réel en deux étapes : on extrait une première suite telle que la partie réelle converge, puis de cette suite extraite on extrait une deuxième suite pour assurer la convergence de la partie imaginaire. On peut itérer le procédé pour davantage de coordonnées :

Corollaire 12.3.17 (Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{C} ou \mathbb{R}^n)

Soit (u_n) une suite bornée dans \mathbb{C} ou dans \mathbb{R}^n . Alors (u_n) admet une valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**

Extraire une première suite assurant la convergence de la partie réelle, et de cette suite, extraire une seconde assurant la convergence de la partie imaginaire. ▷

Remarque 12.3.18

Cette démonstration se généralise facilement à des suites à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la norme euclidienne canonique, ou de toute autre norme. On assure la convergence des coordonnées les unes après les autres, par extractions successives.

Note Historique 12.3.19

Le théorème de Bolzano-Weierstrass a été énoncé par Bolzano en 1830, et démontré par Weierstrass en 1860. Weierstrass connaissait-il l'énoncé de Bolzano ? Ce n'est pas certain, car ce dernier est interdit de publication par l'empire austro-hongrois, car trop critique vis-à-vis de l'ordre établi. Il en résulte que ses résultats ont été très peu diffusés.

Corollaire 12.3.20

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Alors de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I on peut extraire une suite convergeant vers un réel $\ell \in I$.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est quasiment une réexpression du théorème de Bolzano-Weierstrass. Le seul point supplémentaire est l'appartenance $a \in I$, provenant du fait que l'intervalle est fermé (utiliser la conservation des inégalités par passage à la limite). ▷

Cette propriété définit la notion d'ensemble *compact*

Définition 12.3.21 (Sous-ensemble compact, Spé)

Soit E un espace métrique et $K \subset E$. On dit que K est *compact* si de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K , on peut extraire une suite convergeant vers un élément de K .

Ainsi, les intervalles fermés bornés de \mathbb{R} sont des sous-ensembles compacts de \mathbb{R} . On peut montrer plus généralement que les sous-ensembles compacts de \mathbb{R} sont exactement les sous-ensembles fermés et bornés de \mathbb{R} (ce qui inclut en particulier les intervalles fermés bornés).

III.4 Digression sur la construction de \mathbb{R}

Au cours de ce chapitre et des précédents, nous avons croisé un certain nombre de propriétés dont nous avons dit qu'elles auraient pu être prises comme axiome de \mathbb{R} . Voici un petit bilan.

Supposons que nous sachions définir l'ensemble \mathbb{R} , mais que nous ne connaissions aucune propriété de \mathbb{R} . Alors, on pourrait établir :

Théorème 12.3.22 (Propriétés équivalentes à la propriété fondamentale, HP)

Les résultats suivants sont équivalents :

- (i) La propriété de la borne supérieure
- (ii) La description des intervalles de \mathbb{R}
- (iii) Le théorème de convergence monotone
- (iv) Le théorème des suites adjacentes
- (v) La convergence de toutes les suites de Cauchy.

◁ **Éléments de preuve.**

On a déjà montré $(i) \implies (ii)$, $(i) \implies (iii) \implies (iv)$ et $(i) \implies (v)$. On termine avec :

- $(ii) \implies (i)$: Soit X non vide majoré. Considérer $I = \{x \mid \exists y \in X, x \leq y\}$. Montrer que I est un intervalle, et que sa borne supérieure est la borne supérieure de X .
- $(iv) \implies (i)$: Procéder par dichotomie en partant de l'intervalle $[x, M]$ où $x \in X$ et M est un majorant de X . À chaque étape, garder la partie supérieure si elle contient un élément de X , la partie inférieure sinon. Les bornes des intervalles ainsi définis forment deux suites adjacentes, convergeant vers un réel ℓ . Justifier que ℓ est la borne supérieure de X .
- $(v) \implies (iv)$: Deux suites adjacentes sont de Cauchy, donc convergent (utiliser, pour $p \geq n$, l'encadrement $u_n \leq u_p \leq v_n$, et la convergence de $v_n - u_n$ vers 0).

▷

Pour pouvoir construire \mathbb{R} , il faut s'imposer l'une de ces propriétés, les autres en découlent. Nous avons admis la propriété de la borne supérieure, mais nous aurions pu faire un autre choix.

Note Historique 12.3.23

La construction la plus répandue est celle utilisant les suites de Cauchy, construction établie par Charles Méray en 1869, son point de départ étant de prouver rigoureusement la convergence des suites de Cauchy, résultat jusque-là plus ou moins admis, faute d'une construction correcte de \mathbb{R} . Cantor fait la même construction à peu près à la même époque.

III.5 Caractérisations séquentielles

Nous avons déjà caractérisé séquentiellement la limite de fonctions et la continuité. Nous donnons ici trois autres caractérisations.

Théorème 12.3.24 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} . L'ensemble X est (partout) dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : poser u_n dans $V_n \cap X$, où V_n est un voisinage de x collant de plus en plus à X . Comment choisir V_n ?
- Réciproque : en considérant $a < b$ dans \mathbb{R} , et $x \in]a, b[$ quelconque, par exemple le milieu, appliquer la définition de la convergence de u_n vers x avec le voisinage $]a, b[$ de x .

▷

La démonstration montre qu'on peut choisir une suite dont tous les termes sont supérieurs à x , ou de façon symétrique, dont tous les termes sont inférieurs à x . Le lemme des pics (ou une démonstration directe) permet alors d'obtenir une propriété utile dans certaines situations :

Proposition 12.3.25

Soit X un sous-ensemble dense de \mathbb{R} . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $\lim u_n = x$. On peut trouver de même une suite décroissante.

Théorème 12.3.26 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)

Soit X un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} . Alors $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est la borne supérieure de X si et seulement si

1. M est un majorant de X
2. il existe une suite d'éléments de X convergent vers M .

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens réciproque immédiat par caractérisation par ε de la borne supérieure, et définition de la limite.
- Sens direct : utiliser la caractérisation de la borne sup avec des ε de plus en plus petits pour définir une suite qui colle à la borne supérieure.

▷

On peut dans ce cas toujours trouver une suite *croissante* convergent vers $\sup(X)$, et même *strictement croissante* si $\sup(X) \notin X$.

Théorème 12.3.27 (Caractérisation des fermés)

Un sous-ensemble F (de \mathbb{R} ou d'un espace métrique) est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F converge vers une limite elle-même élément de F .

◁ **Éléments de preuve.**

- Si F n'est pas fermé, considérer $x \notin F$ tel que toute boule $B(x, \varepsilon)$ rencontre F . En considérant des ε de plus en plus petits, construire $x_n \rightarrow x$, avec $x_n \in F$.
- S'il existe (x_n) dans F convergent vers $\ell \notin F$, montrer que toute boule $B(\ell, \varepsilon)$ rencontre F .

▷

Ceci se réexprime en disant que toutes les valeurs d'adhérence des suites de F sont encore dans F .

IV Étude de suites d'un type particulier

Nous étudions dans cette section un certain nombre de suites d'un type qu'on rencontre souvent, et qu'il faut savoir étudier.

IV.1 Suites définies par une récurrence affine

Nous étudions ici les suites définies par une relation $u_{n+1} = au_n + b$. Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de cette relation, et la donnée de son terme initial u_0 (ou éventuellement u_N , si la suite ne débute pas au rang 0).

Les suites arithmétiques et les suites géométriques en sont des cas particuliers, par lesquels nous commencerons cette étude.

Définition 12.4.1 (Suite arithmétique)

Une *suite arithmétique* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + b$.

Proposition 12.4.2 (Explicitation des suites arithmétiques)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique, vérifiant la relation $u_{n+1} = u_n + b$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$;
- plus généralement, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_m + (n - m)b$,
- ou encore, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+k} = u_m + kb$.

◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate

▷

Définition 12.4.3 (Suites géométriques)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite géométrique* si et seulement elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation du type $u_{n+1} = au_n$.

Proposition 12.4.4 (Explicitation des suites géométriques)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique, vérifiant la relation $u_{n+1} = au_n$. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot a^n$;
- plus généralement, pour tout $m < n$, $u_n = u_m a^{n-m}$,
- ou encore, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+k} = u_m a^k$.

◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate.

▷

Définition 12.4.5 (Suites arithmético-géométriques)

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* si elle vérifie une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.

Méthode 12.4.6 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)

- Rechercher une constante c telle que $(u_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique. Pour cela, former une relation de récurrence pour $v_n = u_n - c$, et poser c de sorte que cette relation de récurrence soit celle d'une suite géométrique.
- Expliciter la suite géométrique (v_n) et revenir ensuite à (u_n) .

Cette méthode est aussi importante (pour les multiples adaptations qu'on peut en faire) que le résultat qu'on en déduit :

Proposition 12.4.7 (Explicitation des suites arithmético-géométriques)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, de relation $u_{n+1} = au_n + b$, et c le point fixe de la relation, à savoir l'unique réel vérifiant $c = ac + b$. Alors la suite $(u_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c.$$

Exemple 12.4.8

Expliciter la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Remarque 12.4.9

Un autre point de vue sur l'explicitation des suites arithmético-géométriques est le suivant : étant donnée une solution particulière (v_n) de la récurrence, et \mathcal{S}_h l'ensemble des solutions de l'équation « homogène » $u_{n+1} = au_n$ (donc l'ensemble des suites géométriques), l'ensemble des solutions de l'équation initiale est

$$\mathcal{S} = (v_n) + \mathcal{S}_h = \{(v_n + w_n), (w_n) \in \mathcal{S}_h\}.$$

L'explicitation précédente correspond alors à la recherche d'une solution particulière constante. L'expression ci-dessus insiste sur la structure d'« espace affine » de l'ensemble des solutions (translaté d'un espace vectoriel).

Cette dernière méthode s'applique dans des situations plus générales de relations $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$:

Théorème 12.4.10 (Structure)

L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$ où (b_n) est une suite fixée, est un sous-espace affine de l'ensemble des suites, obtenu comme somme d'une solution particulière, et de l'ensemble des suites géométriques de raison a (i.e. solutions de l'équation homogène $u_{n+1} = a u_n$).

La structure affine se traduit par le fait que l'ensemble des solutions est obtenu en ajoutant une solution particulière à l'ensemble des solutions de la relation homogène associée, et que l'ensemble des solutions de la relation homogène est non vide et stable par combinaison linéaire.

◁ **Éléments de preuve.**

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène est clairement non vide (contient la suite nulle) et stable par CL.
- si (u_n) est une solution particulière, (u_n) est une solution ssi $(u_n - v_n)$ est solution de la relation homogène associée.

▷

Méthode 12.4.11 (Explicitation de $u_{n+1} = au_n + P(n)$, P polynôme)

Chercher une solution polynomiale de même degré que P . Procéder par identification des coefficients.

IV.2 Suites définies par une relation linéaire d'ordre k **Définition 12.4.12 (Suites récurrentes linéaires d'ordre k)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre k si (u_n) vérifie une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1u_{n+1} + a_0u_n.$$

où $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$.

Une suite récurrente d'ordre k est entièrement déterminée par sa relation de récurrence et la donnée de ses k premiers termes.

Note Historique 12.4.13

Leonardo Fibonacci (1175-1250), aussi appelé Leonardo Pisano, ou en français, Léonard de Pise, est un mathématicien italien, dont l'enfance passée en Kabylie a contribué à l'introduction en Europe des chiffres arabes. Il a écrit plusieurs recueils de problèmes numériques. Sa contribution aux mathématiques la plus célèbre reste la suite portant son nom. Elle aurait été introduite par Fibonacci en vue de dénombrer les lapins de son élevage en fonction du nombre de lapins des saisons précédentes. C'est la première vraie formule de récursion de l'histoire des mathématiques.

« Fibonacci » n'est pas son vrai nom. Littéralement, cela signifie « fils de Bonacci », son père s'appelant Guilielmo Bonacci. Le nom « Fibonacci » lui a été donné à titre posthume.

Définition 12.4.14 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire, de relation

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n \quad \text{soit:} \quad u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \dots - a_1u_{n+1} - a_0u_n = 0$$

Le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le polynôme

$$P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_1X - a_0.$$

La recherche des racines du polynôme caractéristique permet d'explicitier les suites récurrentes linéaires. Nous nous contentons d'énoncer et démontrer le cas de récurrences linéaires d'ordre 2, le seul au programme.

Théorème 12.4.15 (Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et P son polynôme caractéristique, de degré 2.

1. Si P admet deux racines distinctes (réelles ou complexes) r et s , alors il existe des scalaires (réels ou complexes) λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

2. Si P admet une racine double r , alors il existe des scalaires (réels ou complexes) λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

◁ Éléments de preuve.

1. Montrer que (r^n) et (s^n) , ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires, vérifient la relation de récurrence. Montrer ensuite qu'on peut trouver λ et μ tel que la relation $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$ soit vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, puis propager l'égalité par récurrence (ce qui revient à dire qu'une suite vérifiant une telle relation est entièrement déterminée par ses deux premiers termes).
2. De même avec les suites (r^n) et (nr^n) cette fois.

▷

Méthode 12.4.16 (Explicitation d'une récurrence d'ordre 2)

- Déterminer le polynôme caractéristique, et rechercher ses racines.
- Suivant la situation, donner la forme de l'explicitation, avec les paramètres λ et μ
- Écrire la relation obtenue pour les deux termes initiaux (généralement $n = 0$ et $n = 1$). cela fournit un système de deux équations à deux inconnues λ et μ .
- Résoudre ce système pour trouver les valeurs de λ et μ .

Exemple 12.4.17 (Suites de Fibonacci)

Expliciter la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Ce résultat se généralise bien au cas de suites récurrences linéaires d'ordre k , lorsque les racines sont deux à deux distinctes. Nous donnons le résultat, mais nous nous dispenserons de la preuve, pour laquelle nous n'avons pas encore tous les outils d'algèbre linéaire adéquats.

Théorème 12.4.18 (Explicitation des suites récurrentes linéaires, cas particulier, HP, admis)

Si P admet exactement k racines distinctes 2 à 2 (réelles ou complexes) r_1, \dots, r_k , alors il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \dots + \lambda_k r_k^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i r_i^n.$$

Les complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont déterminés par les conditions initiales, par la résolution d'un système de k équations à k inconnues.

La formule générale consiste alors à rajouter des facteurs polynomiaux multipliant les suites géométriques, dont les degrés sont strictement inférieurs à la multiplicité de la racine correspondante dans le polynôme caractéristique.

De même que pour le cas des suites d'ordre 1, on a un théorème de structure lorsqu'on ajoute un second membre. A voir comme une généralisation des suites arithmético-géométriques.

Théorème 12.4.19 (Structure)

Soit (b_n) une suite, et les deux relations de récurrence suivantes :

- $(E) : u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n + b_n$
- $(EH) : v_{n+k} = a_{k-1}v_{n+k-1} + \dots + a_1v_{n+1} + a_0v_n$.

Alors l'ensemble des suites vérifiant (E) est un sous-espace affine de l'ensemble des suites, obtenu comme somme d'une solution particulière, et du sous-espace vectoriel des solutions de (EH) .

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe que dans le cas de récurrences d'ordre 1.

▷

Méthode 12.4.20

Lorsque $b_n = \lambda^n Q(n)$ ($Q \in \mathbb{C}[X]$), on dispose d'une méthode similaire à celle décrite pour le cas des équations différentielles. Plus précisément, si P est le polynôme caractéristique, et m la multiplicité de λ comme racine de P , on recherchera une solution particulière sous la forme $n^m R(n)$, où R est un polynôme de même degré que Q .

IV.3 Suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Enfin, nous donnons quelques méthodes d'étude de suites récurrentes d'ordre 1 non linéaires, c'est-à-dire de suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une certaine fonction f . Nous dirons dans ce paragraphe simplement « suite récurrente » pour désigner une telle suite. On parle aussi de système dynamique discret. Remarquez qu'une telle suite n'est pas toujours bien définie : il peut arriver qu'un terme u_n sorte du domaine de définition de f , et qu'on ne puisse plus appliquer la relation de récurrence. Une des premières tâches est souvent de vérifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Si souvent, cette justification est intuitivement évidente, son principe est basé sur la récurrence : si on parvient à définir le terme u_n , on peut encore définir le terme u_{n+1} .

Nous nous intéressons en particulier à la limite de (u_n) . La recherche de la limite d'une suite récurrente s'opère toujours sur le même principe.

Méthode 12.4.21 (Étude de la limite d'une suite récurrente)

- Étudier l'existence de la limite :
 - * s'assurer que la suite est bien définie,
 - * étudier sa monotonie, et obtenir l'existence de la limite à l'aide par exemple du théorème de la limite monotone.
- une fois assurée l'existence de la limite, déterminer les valeurs possibles de cette limite ℓ en passant à la limite dans la relation de récurrence :

Si f est continue, soit ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit ℓ est un bord ouvert du domaine de f .

- Déterminer, parmi l'ensemble des valeurs possibles de ℓ laquelle est la bonne.
- Déterminer les points fixes de f peut déjà s'avérer utile pour la première étape (aide à la recherche d'intervalles stables, de majorants et de minorants). Commencer par cela peut être efficace.

Nous donnons quelques techniques utiles pour la première étape de cette méthode.

Définition 12.4.22 (Intervalle stable)

On dit qu'un intervalle I est stable par f si f est définie sur I (i.e. $I \subset D_f$) et $f(I) \subset I$.

Remarque 12.4.23

La recherche des points fixes aide souvent à déterminer des intervalles stables.

Théorème 12.4.24 (CS pour que (u_n) soit bien définie)

Si I est un intervalle stable par f , et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

◁ Éléments de preuve.

Montrer par récurrence que u_n est défini, et $u_n \in I$. Comme I est dans le domaine, on peut alors continuer. ▷

Évidemment, si on parvient à trouver un indice N tel que u_N soit dans un intervalle stable, on parvient à la même conclusion.

Les intervalles stables permettent aussi souvent d'étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La situation la plus simple est la suivante (et assez facile à détecter graphiquement) :

Proposition 12.4.25 (Étude des variations lorsque $f - \text{id}$ est de signe constant)

Supposons $f - \text{id}$ de signe constant sur un intervalle stable I , et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone, de sens de monotonie déterminé par le signe de $f - \text{id}$.

◁ **Éléments de preuve.**

D'après ce qui précède, pour tout n , $u_n \in I$. Appliquer f pour comparer u_{n+1} à u_n . ▷

Lorsque f admet des propriétés de monotonie sur un intervalle stable, on peut aussi conclure assez facilement.

Proposition 12.4.26 (Étude des variations lorsque f est croissante)

Supposons f croissante sur un intervalle stable I , et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial). Alors (u_n) est monotone. On trouve le sens de monotonie en comparant u_0 et u_1 .

◁ **Éléments de preuve.**

Tout d'abord, tous les termes u_n sont dans I . On peut alors propager par récurrence l'inégalité initiale entre u_0 et u_1 , en appliquant la fonction croissante f . ▷

Proposition 12.4.27 (Étude des variations lorsque f est décroissante)

Supposons f décroissante sur un intervalle stable I , et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial). Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposés. On trouve les sens de monotonie en comparant u_0 et u_2 .

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le résultat précédent à $f \circ f$, décrivant la récurrence associée aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . ▷

Avertissement 12.4.28

Dans le cas d'une fonction f décroissante, il ne suffit pas de comparer u_0 et u_1 : $u_0 < u_1$ ne suffit pas pour établir la croissance de (u_{2n}) et la décroissance de (u_{2n+1}) . Ce serait suffisant si on savait de plus que ces deux suites admettent une même limite, mais ce n'est en général pas le cas.

Remarque 12.4.29

Lorsque f est croissante, l'argument ci-dessus suffit à obtenir la convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il suffit de majorer ou minorer suivant le cas pour obtenir la convergence vers \mathbb{R} . La connaissance des points fixes de f peut aider à trouver des majorants. En effet, si f est croissante, et c un point fixe tel que $u_0 \leq c$, on peut propager cette inégalité aux rangs suivants. Ainsi, on cherchera en général à majorer ou minorer par des points fixes.

Avertissement 12.4.30

Ainsi, si f est décroissante sur un intervalle stable, les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés. Cela ne suffit pas pour prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Pour cela, il faut encore s'assurer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite. Les limites de ces deux suites sont à rechercher parmi les points fixes de $f \circ f$. Si $f \circ f$ a deux points fixes distincts, on peut très bien avoir convergence de (u_{2n}) vers l'un des deux et de (u_{2n+1}) vers l'autre. Essayez de construire un exemple graphique.

Avertissement 12.4.31

Les points fixes de f sont évidemment points fixes de $f \circ f$, mais la réciproque est fautive en général! On n'a qu'une inclusion de l'ensemble des points fixes de f dans l'ensemble des points fixes de $f \circ f$. Ainsi, pour trouver les limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , il ne faut pas se contenter de considérer les points fixes de f . L'équation permettant de calculer les points fixes de $f \circ f$ peut parfois être un peu compliquée, mais on peut parfois s'aider de la connaissance de certaines solutions particulières pour la simplifier (les points fixes de f sont solutions).

Exemple 12.4.32

Étude de la suite $u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.

Calcul asymptotique

Dans ce chapitre, on introduit certains outils permettant de mieux comprendre le comportement des suites ou fonctions au voisinage de l'infini (pour les suites), ou d'un point quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$ (pour les fonctions). Ces outils permettent d'affiner la notion de limite, notamment dans le cas d'une limite nulle ou infinie : ils nous permettront d'exprimer le fait qu'une suite converge plus rapidement vers 0 qu'une autre, ou sensiblement à la même vitesse.

I Domination, négligeabilité

I.1 Cas des suites

Définition 13.1.1 (Domination, cas des suites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) si et seulement s'il existe un réel M tel que à partir d'un certain rang n_0 , $|u_n| \leq M|v_n|$, soit, formellement :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|.$$

De manière équivalente, (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement s'il existe une suite (μ_n) telle que pour tout n assez grand, $u_n = \mu_n v_n$, et (μ_n) est bornée.

Ainsi, (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si l'ordre de grandeur de (u_n) ne dépasse pas celui de (v_n) , à une constante multiplicative près.

Définition 13.1.2 (Négligeabilité, cas des suites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

De manière équivalente, (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Il est souvent plus pratique d'utiliser, lorsque c'est possible, les caractérisations suivantes de la domination et de la négligeabilité.

Proposition 13.1.3

Si (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang au moins), alors :

1. (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée ;
2. (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

Enfin, pour pouvoir gérer facilement des relations de domination ou de négligeabilité, ou pour pouvoir écrire des approximations de façon commode, on utilise les notations suivantes :

Notation 13.1.4 (Notations de Bachmann et de Landau)

1. Si (u_n) est dominée par (v_n) , on note $u_n = O(v_n)$
2. Si (u_n) est négligeable devant (v_n) , on note $u_n = o(v_n)$

L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut par exemple considérer $u_n = v_n + o(v_n)$. C'est notamment pratique pour formaliser des approximations. Ainsi, dire que

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

signifie que pour n assez grand, u_n est à peu près égal à $2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}$, et que l'erreur faite en approchant u_n par cette expression est négligeable devant le plus petit terme de cette expression polynomiale. Il s'agit d'une bonne approximation par une expression polynomiale en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2. Il s'agit même de la meilleure.

Avertissement 13.1.5

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant cette égalité. Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance ((u_n) appartient à l'ensemble des suites dominées par (v_n)). Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation. Par exemple :

- $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$ n'implique pas $u_n = u'_n$, ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.
- on ne peut pas simplifier des o : $u_n + o(v_n) = v_n + o(v_n)$ n'implique pas $u_n = v_n$

Proposition 13.1.6

Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Une suite tendant vers 0 est bornée. ▷

Note Historique 13.1.7

- La notation O pour la dominance a été introduite par le mathématicien allemand Paul Bachmann dans son livre *Die analytische Zahlentheorie* (1894)
- Le mathématicien allemand Edmond Landau, spécialiste de la théorie des nombres, introduit la notation o dans son *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (1909)
- Le britannique Godfrey Harold Hardy d'une part et le russe Ivan Vinogradov d'autre part, introduisent d'autres notations pour la dominance et la négligeabilité. Les notations de Hardy ne sont plus utilisées, celles de Vinogradov restent parfois utilisées en théorie des nombres.

- Hardy introduit également la notation Ω pour désigner la négation de la négligeabilité.
- L'informaticien Donald Knuth (spécialiste de l'informatique théorique, et créateur du célèbre logiciel TeX, référence encore aujourd'hui pour la composition de documents mathématiques professionnels, notamment sous sa forme dérivée LaTeX) sème la confusion en redéfinissant (en toute connaissance de cause) la notation $\Omega(u_n)$ dans un article de 1976 (*Big Omicron and Big Omega and Big Theta*) :

$$v_n = \Omega(u_n) \iff \exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \geq Cu_n.$$

Il définit également la notation $\Theta(u_n)$:

$$v_n = \Theta(u_n) \iff \exists C, C' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, C'u_n \leq v_n \leq Cu_n.$$

Ces notations sont plus adaptées que o et O pour l'étude de la complexité des algorithmes : une minoration de la complexité permet de mieux cerner les limitations d'un algorithme !

Exemple 13.1.8 (Reexpression des croissances comparées)

1. $\ln n = o(n^\alpha)$ ($\alpha > 0$)
2. $n^\alpha = o(e^n)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
3. $n! = o(n^n)$.
4. $a^n = o(n!)$ ($a \in \mathbb{R}$)
5. $n^a = o(n^b)$ si $a < b$

Ainsi, pour $\alpha > 0$, $\boxed{\ln(n) \ll n^\alpha \ll e^n \ll n! \ll n^n}$.

Proposition 13.1.9

Soit (u_n) une suite réelle.

1. $u_n = O(1)$ si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. $u_n = o(1)$ si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. $\lim u_n = \ell$ si et seulement si $u_n = \ell + o(1)$.

◁ Éléments de preuve.

C'est juste la réexpression de trois cas particuliers de la définition. ▷

I.2 Propriétés des o et O

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination (resp. de négligeabilité) se comporte à peu près comme une relation d'ordre large (resp. stricte), ce qu'expriment les propriétés suivantes. Dans ces énoncés, (u_n) , (v_n) , (w_n) et (x_n) désignent des suites réelles.

Propriétés 13.1.10 (Transitivités strictes et larges de o et O)

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

◁ Éléments de preuve.

Intrduire des suites (μ_n) et (ε_n) traduisant les propriétés de domination et de négligeabilité. On est ramené à des propriétés sur les produits de limites : 0×0 , $0 \times$ borné, borné $\times 0$, ainsi que borné \times borné = borné. ▷

Propriétés 13.1.11 (sommées de o et O)

1. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
4. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe. cette fois-ci, on a des sommes au lieu de produits. ▷

Propriétés 13.1.12 (produits de o et O)

1. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
4. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n x_n)$.
5. En particulier, $w_n o(x_n) = o(w_n x_n)$ et $w_n O(x_n) = O(w_n x_n)$
(Les o et O sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif).

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe. ▷

Remarque 13.1.13 (Intérêt des o et O)

On se sert souvent des o et O pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$. On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou u_n à une suite de référence de limite $+\infty$. Par exemple, une suite telle que $|u_n - \ell| = o(e^{-n})$ aura une convergence rapide (exponentielle), alors que l'information $|u_n - \ell| = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ ne permet pas de contrôler aussi bien la convergence (mais une telle égalité n'empêche pas que la convergence puisse être rapide).

Les propriétés des o et O ressemblent beaucoup à des propriétés de relations d'ordre. Plus précisément :

Proposition 13.1.14 (o se comporte comme une inégalité stricte)

La relation o est une relation d'ordre stricte sur l'ensemble des suites non ultimement nulles (i.e. nulles à partir d'un certain rang).

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifier l'irréflexivité (immédiat) et l'asymétrie (par l'absurde). ▷

Proposition 13.1.15 (Pourquoi O se comporte presque comme une inégalité large, HP)

La relation Θ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La relation O passe au quotient et définit une relation d'ordre large sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\Theta$.

◁ **Éléments de preuve.**

L'affirmation sur Θ est immédiate, la possibilité de passer au quotient se montre en justifiant que l'affirmation $u_n = O(v_n)$ est indépendante de la classe d'équivalence de (u_n) et de (v_n) . Le passage au quotient de O permet de récupérer l'antisymétrie qui manquait. ▷

I.3 Extension au cas des fonctions

Définition 13.1.16 (Domination, cas des fonctions)

Soit f et g deux fonctions définies sur X et $a \in \overline{X}$. On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a et une application h définie sur $V \cap X$, et bornée, telle que $f = hg$ sur $V \cap X$.

On note $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ ou $f = O_a(g)$.

Ainsi, f est dominée par g si et seulement si l'ordre de grandeur de f ne dépasse pas celui de g , à une constante multiplicative près, au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas au voisinage de a , il revient au même de dire que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

Définition 13.1.17 (Négligeabilité, cas des fonctions)

Soit f et g deux fonctions définies sur X , et $a \in \overline{X}$. On dit que f est *négligeable* devant g s'il existe un voisinage V de a , et une fonction h définie sur V , tels que

$$\forall x \in V, f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0.$$

On note $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ ou $f = o_a(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de a , il revient au même de dire que $\frac{f}{g}$ admet une limite nulle en a .

Théorème 13.1.18 (Caractérisation par ε)

Sous les hypothèses précédentes :

1. $f = O_a(g)$ si et seulement s'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap X$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$.
2. $f = o_a(g)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap X$, $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$.

◁ Éléments de preuve.

Les deux équivalences se démontrent de même. Le sens direct est assez facile, en exprimant le fait que h est borné, ou sa limite nulle par ε . Pour le sens réciproque, commencer par montrer qu'il existe un voisinage V_0 tel que pour tout $x \in V_0 \cap X$, $g(x) = 0 \implies f(x) = 0$. Définir alors h par $\frac{f}{g}$ lorsque g ne s'annule pas et 0 sinon, et vérifier que h vérifie les propriétés requises (par ε pour la limite). ▷

Ainsi, f est dominée par g si et seulement si l'ordre de grandeur de f ne dépasse pas celui de g , à une constante multiplicative près, au voisinage de a ; f est négligeable devant g si au voisinage de a , $|f|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut devant $|g|$.

Théorème 13.1.19 (Caractérisation séquentielle)

Soit f et g deux fonctions définies sur X , et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f = O_a(g)$ si et seulement si pour toute suite $u_n \rightarrow a$ à valeurs dans X , $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f = o_a(g)$ si et seulement si pour toute suite $u_n \rightarrow a$ à valeurs dans X , $f(u_n) = o(g(u_n))$.

◁ Éléments de preuve.

1. Sens direct : introduire h bornée au voisinage de a . Alors $(h(u_n))$ bornée.

Sens réciproque : par contraposée, à partir de la caractérisation par M ; construire une suite $x_n \rightarrow a$ (coller le voisinage V à a) telle que pour tout n , $f(x_n) > n|g(x_n)|$.

2. Sens direct : introduire h définie au voisinage de a et de limite nulle, puis appliquer x_n .

Sens réciproque : par contraposée, à partir de la caractérisation par ε . Construire $x_n \rightarrow a$ tel que $f(x_n) > \varepsilon g(x_n)$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

▷

Comme dans le cas des limites, cette caractérisation séquentielle permet de transférer toutes les propriétés des o et O pour les suites au cas des fonctions. Ces propriétés peuvent aussi se montrer directement sur le même principe que dans le cas des suites. Pour les propriétés relatives aux relations d'ordres définies par o et O , il faut remplacer l'hypothèse « non ultimement nul » par « non identiquement nulle sur un voisinage de a ».

II Équivalents

II.1 Cas des suites

Définition 13.2.1 (Équivalence)

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* s'il existe une suite (α_n) et un entier n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = \alpha_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \alpha_n = 1.$$

Notation 13.2.2

Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou simplement $u_n \sim v_n$.

De la définition découle le résultat important suivant :

Proposition 13.2.3 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité)

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

◁ Éléments de preuve.

Dans le sens direct, il suffit d'écrire $u_n - v_n$ en fonction de v_n et de la suite α_n de la définition de l'équivalence. Pour la réciproque, démarche inverse. ▷

Cette propriété implique notamment qu'une somme de terme est équivalente à son terme prépondérant (celui devant lequel tous les autres sont négligeables). La recherche de l'équivalent d'une somme passe de fait souvent par l'étude des négligeabilités des termes les uns par rapport aux autres. On en déduit par exemple :

Proposition 13.2.4 (équivalent d'un polynôme)

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

◁ Éléments de preuve.

Soit faire le quotient par le monôme dominant, soit utiliser la propriété précédente, en remarquant que pour tout $k < d$, $n^k = o(n^d)$ (donc une CL de termes de ce type aussi). ▷

Par exemple, $2n^2 + n - 1 \sim 2n^2$.

Comme pour la négligeabilité et la dominance, on a une version commode lorsque (v_n) ne s'annule pas

Proposition 13.2.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang).
Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque 13.2.6

Dans les trois notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$, les égalités s'appliquent bien aux termes u_n et v_n , et non aux suites. Cependant on ne quantifie pas les expressions dans lesquelles interviennent des o , O ou des équivalents : il s'agit d'une égalité au voisinage de $+\infty$, comme les limites.

Proposition 13.2.7

La relation \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles.

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifications immédiates à partir de la définition. ▷

II.2 Propriétés des équivalents**Théorème 13.2.8 (Conservation des limites par équivalence)**

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et sa limite est ℓ .

◁ **Éléments de preuve.**

Propriété de produit de limites à partir de la définition. ▷

Avertissement 13.2.9

La réciproque est fautive en général. Elle est vraie en cas de limite non nulle et non infinie, mais en revanche, deux suites de même limite nulle ou infinie ne sont pas nécessairement équivalentes

Exemples 13.2.10

1. (n) et (n^2) ne sont pas équivalentes
2. (e^{-n}) et (e^{-2n}) ne sont pas équivalentes.

Ainsi, la notion d'équivalent n'a vraiment d'intérêt que pour des suites de limite nulle ou infinie. Dans ce cas, la recherche d'un équivalent permet d'estimer la vitesse de convergence. On recherche pour cela un équivalent sous une forme simple et bien connue, par exemple n^a , ou $n^a \ln^b n$ etc. On peut ainsi comparer la vitesse de convergence de deux suites.

Proposition 13.2.11 (Conservation du signe)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors il existe n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, u_n et v_n soient de même signe.

◁ **Éléments de preuve.**

Si $\alpha_n \rightarrow 1$, alors α_n est positive à partir d'un certain rang. ▷

Avertissement 13.2.12

Attention, cela ne signifie pas qu'à partir du rang n , (u_n) et (v_n) sont de signe constant ! Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

On peut faire un peu mieux, et obtenir une conservation stricte : il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n et v_n sont soit tous les deux nuls, soit strictement de même signe.

Comme les o et O , les équivalents se comportent bien vis-à-vis des produits et des quotients :

Proposition 13.2.13 (Équivalents de produits, quotients, puissances)

Soit (u_n) , (v_n) , (u'_n) et (v'_n) quatre suites réelles.

1. Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$.
2. Si de plus v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$.
3. Si $u_n \sim u'_n$ et si a est un réel fixé, alors $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$.

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat par définition (en introduisant des suites α_n). Remarquez que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. ▷

En revanche, le passage à une puissance dépendant de n requiert de la prudence (revenir à la notation exponentielle).

Lors de l'étude des fonctions usuelles, nous avons rencontré un certain nombre de limites remarquables, qui en fait s'expriment sous forme d'un équivalent, et sont généralement plus commodes à utiliser sous cette forme.

Proposition 13.2.14 (Équivalences et négligeabilité)

Les relations o et O au voisinage de a sont indépendantes des classes d'équivalence pour la relation \sim_a . Ainsi, si $u_n \sim_a u'_n$ et $v_n \sim_a v'_n$, alors $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u'_n = o(v'_n)$ (et de même pour O).

◁ **Éléments de preuve.**

Immédiat à partir des définitions en introduisant des suites adéquates. Ou bien en remarquant que $u_n \sim v_n$ implique $u_n = \Theta(v_n)$, pour se raccorder à un résultat déjà vu. ▷

II.3 Cas des fonctions**Définition 13.2.15 (Équivalence entre fonctions)**

Deux fonctions f et g définies sur X sont dites *équivalentes* au point $a \in \overline{X}$ s'il existe un voisinage V de a et une fonction h définie sur $V \cap X$ de a tel que

$$\forall x \in V \cap X, f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1.$$

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de a , il revient au même de dire que $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a . Il revient également au même de dire que $f = g + o_a(g)$.

Encore une fois, toutes les propriétés vues pour les équivalents de suites restent valables pour les équivalents de fonctions, par démonstration directe sur le même principe que pour les suites, ou grâce au théorème suivant :

Théorème 13.2.16 (Caractérisation séquentielle de l'équivalence)

Soit f et g deux fonctions définies sur X et $a \in \overline{X}$. Alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement pour toute suite (x_n) d'éléments de X telle que $x_n \rightarrow a$, $f(x_n) \sim g(x_n)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Conséquence de la caractérisation séquentielle de o , appliquée à $f - g = o_a(g)$.

▷

II.4 Équivalents classiques**Proposition 13.2.17 (Équivalents classiques, à connaître sur le bout des doigts)**

- | | |
|---|--|
| 1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$; | 6. $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$; |
| 2. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$; | 7. $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$; |
| 3. $(1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$ ($a \neq 0$) ; | 8. $\operatorname{th}(x) \underset{0}{\sim} x$; |
| 4. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$; | 9. $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{0}{\sim} x$; |
| 5. $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$; | 10. $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$; |
| 6. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$; | |

◁ **Éléments de preuve.**

Ce sont des réexpressions des limites remarquables. Pour rappel, la plupart de ces limites sont obtenues par taux d'accroissement.

▷

Théorème 13.2.18 (Formule de Stirling, admis)

On a : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

◁ **Éléments de preuve.**

Traditionnel DM. La démonstration est hors-programme, mais pas la formule.

▷

II.5 Problème de la somme et de la composition des équivalents

Nous n'avons pas vu de règle pour sommer des équivalents. C'est normal. C'est interdit.

Avertissement 13.2.19 (Sommes d'équivalents)

Ne pas sommer des équivalents.

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

Exemple 13.2.20

$u_n = \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$; Faites la somme des deux.

Méthode 13.2.21 (Pour contourner le problème des sommes d'équivalents)

- Étudier les négligeabilités entre les termes de la somme, pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.

- Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.
- Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.
- Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité (voir chapitre correspondant).

Exemple 13.2.22

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Avertissement 13.2.23 (Composition d'équivalents)

Ne composez pas un équivalent par une fonction.

En général, $u_n \sim v_n$ n'implique pas $f(u_n) \sim f(v_n)$. Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, ça peut être faux.

Exemples 13.2.24

1. Est-ce que $e^n \sim e^{n+1}$?
2. Est-ce que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$?

Méthode 13.2.25 (Trouver un équivalent simple de $\ln(u_n)$)

1. Si $u_n \rightarrow 1$, utiliser l'équivalent classique
2. Sinon, écrire $u_n = v_n(1 + o(1))$, où v_n est un équivalent simple de u_n , puis $\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln(1 + o(1))$. Comparer ensuite les deux termes. Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme pour le sortir du logarithme.
3. Évidemment, cela s'adapte aux fonctions.

Exemple 13.2.26

Trouver un équivalent de $\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$.

Méthode 13.2.27 (Trouver un équivalent de e^{u_n})

Développer u_n à $o(1)$ près : $u_n = v_n + o(1)$. S'adapte aux fonctions.

Exemple 13.2.28

En admettant qu'au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, montrer que

$$e^{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{e^{\frac{5}{x}}}{\sqrt{e}}.$$

Approximations polynomiales

J'ai bien dit des injures, et de bien grosses, à mon ami Mr Taylor [...] sur l'obscurité étonnante, et la mauvaise façon de son livre.

(Monmortius)

Le Calcul infinitésimal [...] est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER.

(Jean Dieudonné)

Le but de ce chapitre est d'affiner l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point. L'étude des dérivées permet d'approcher localement une courbe par une droite (la tangente). Dans ce chapitre, nous généralisons ce point de vue en montrant comment les formules de Taylor permettent d'approcher une courbe au plus près (localement) par une courbe polynomiale de degré donné. Nous étudions ensuite la qualité de cette approximation, en majorant (localement ou globalement) l'erreur faite en approchant la courbe par cette courbe polynomiale. C'est l'objet de l'étude des restes de Taylor. Nous terminons par l'application de ces approximations polynomiales au calcul de limites, et par quelques outils permettant de calculer ces approximations sans avoir à revenir à la formule de Taylor (et donc au calcul bien fastidieux de toutes les dérivées successives). Il s'agit du calcul des développements limités.

Nous supposons connue les notions de fonction polynomiale réelle (que nous appellerons plus simplement polynôme), et de degré. Nous ne ferons qu'un usage intuitif de ces notions; il est inutile d'avoir étudié le chapitre sur les polynômes avant celui-ci. Un polynôme $x \mapsto P(x)$ sera aussi désigné formellement par $P(X)$ (où X n'a plus le rôle d'une variable; c'est ce qu'on appelle une indéterminée formelle). On pourra donc parler du polynôme $X^2 + X + 1$ par exemple. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

I Formules de Taylor

Dans toute cette section, f désigne une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , et $x_0 \in I$.

I.1 Développement de Taylor

But : étant donné n , définir un polynôme P de degré au plus n qui approche au mieux f au voisinage d'un point $x_0 \in I$. Tout d'abord, la valeur au point doit être la même : $P(x_0) = f(x_0)$. Ensuite, les deux courbes doivent être tangentes, ce qui impose que $P'(x_0) = f'(x_0)$. La variation des tangentes au voisinage de x_0 doit ensuite être la plus semblable possible, ce qui impose que $P''(x_0) = f''(x_0)$. Intuitivement, on en déduit que le meilleur polynôme de degré n approchant la courbe au voisinage de x_0 vérifie donc les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0) \quad P'(x_0) = f'(x_0) \quad \dots \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

à condition bien sûr que ces dérivées de f soient définies. On dit que les courbes de P et f sont *tangentes à l'ordre n* en x_0 .

Définition 14.1.1 (Développement de Taylor de f)

Soit f une fonction admettant en x_0 une dérivée d'ordre n . Alors un *développement de Taylor* de f en x_0 à l'ordre n est un polynôme P de degré au plus n vérifiant les conditions :

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

donc un polynôme dont la courbe est tangente à l'ordre n à celle de f en x_0 .

Théorème 14.1.2 (Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f)

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0 . Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe, est unique, et est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Justifier d'abord que tout polynôme peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k$ (récurrence sur le degré). Procéder par analyse synthèse pour trouver les a_k , en dérivant et évaluant en x_0 , de façon répétée. ▷

Remarque 14.1.3

Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de x_0 n'est autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de f en x_0 . Les développements de Taylor sont donc à voir comme une généralisation polynomiale de la droite tangente, aux ordres supérieurs.

Définition 14.1.4 (Reste de Taylor à l'ordre n)

Si f admet en x_0 une dérivée d'ordre n , on note R_n la différence entre f et son développement de Taylor :

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0).$$

R_n est appelé *reste de Taylor à l'ordre n de f au point x_0* .

On note parfois $R(x, x_0)$ pour indiquer la dépendance vis-à-vis du point x_0 .

L'objet des formules de Taylor est d'étudier ce reste. Cela a pour but d'estimer l'erreur faite en approchant f par son développement de Taylor. Notamment, si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I , est-ce qu'en faisant tendre n vers $+\infty$, le développement de Taylor tend vers f ?

Proposition/Définition 14.1.5 (Fonction développable en série de Taylor)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur I . Si pour tout $x \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Dans ce cas, on dit que f est *développable en série de Taylor au point x_0* .

Dans cette notation, la borne infinie de la somme signifie qu'on est passé à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ sur cette borne (comme pour les intégrales à bornes infinies).

Exemples 14.1.6

1. Dans la suite, nous donnons les développements des fonctions usuelles en séries de Taylor au voisinage de points particuliers. On pourrait montrer qu'elles sont développables en séries de Taylor (au moins localement) au voisinage de tout point.
2. Il existe des fonctions de classe C^∞ au voisinage d'un point x_0 , qui ne sont développables en série de Taylor sur aucun voisinage de x_0 , par exemple la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, étudiée au voisinage de 0.

Note Historique 14.1.7

Les formules de Taylor doivent leur nom au mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731). Il donne deux versions du théorème, dont l'une obtenue par généralisation d'un résultat de Halley (celui de la comète). On doit aussi à Brook Taylor la naissance du calcul des différences finies, et l'intégration par parties.

Les trois formules suivantes donnent trois évaluations du reste de Taylor, plus ou moins précises suivant que les hypothèses sont plus ou moins fortes. On commence par la plus précise des formules de Taylor, aussi celle qui demande le plus d'hypothèses.

I.2 Formule de Taylor avec reste intégral (ou reste de Laplace)

Nous avons déjà démontré, avec le théorème d'intégration par parties itérées, cette formule de Taylor. Le reste y est exprimé de façon exacte, sans aucun terme inconnu.

Théorème 14.1.8 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n au point a)

Soit $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Cette formule se généralise bien entendu au cas où $b < a$; il n'y a dans ce cas qu'à inverser les bornes des intervalles.

I.3 Formule de Taylor-Lagrange

La seconde formule de Taylor que nous voyons exprime aussi le reste de Taylor sous forme exacte, mais dépendant d'un paramètre c qu'on ne connaît pas précisément. Étant moins précise que la première formule, elle nécessite aussi des hypothèses moins fortes.

Théorème 14.1.9 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a , évaluée en b , HP)

Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule n'étant pas au programme, nous nous dispensons de la preuve. Pour ceux qui veulent la chercher en exercice, considérer $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, où A est choisi tel que $g(a) = g(b)$, puis appliquer le théorème de Rolle. \triangleright

Cette formule s'adapte au cas où $b < a$ sans changement d'expression.

Remarque 14.1.10

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 est exactement la formule des accroissements finis.

Corollaire 14.1.11 (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a)

Sous les mêmes hypothèses, et l'hypothèse supplémentaire que $m \leq f^{(n+1)} \leq M$ sur $]a, b[$, on a (pour $a < b$) :

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En particulier, si $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur $]a, b[$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette dernière inégalité est également vraie si $b < a$.

Remarque 14.1.12

Seule l'inégalité de Taylor-Lagrange est au programme, sous des hypothèses plus fortes (f de classe \mathcal{C}^{n+1}). Sous cette hypothèse, elle est conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce point de vue est davantage conforme au programme.

I.4 Formule de Taylor-Young

La dernière formule que nous voyons est la moins exacte : elle présente le reste sous forme d'une approximation locale (valable au voisinage d'un point), contrairement aux deux autres qui donnaient une expression exacte valable sur tout un intervalle, donc qui avaient une portée globale. Étant la formule la moins précise des trois, c'est aussi celle qui nécessite les hypothèses les moins fortes.

Théorème 14.1.13 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $x_0 \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 . Alors, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

◁ Éléments de preuve.

Cette formule est une conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral prise à l'ordre $n-1$ (on n'a pas les hypothèses suffisantes pour aller à un ordre supérieur), en procédant à un encadrement à l'aide d' ε de l'intégrale. \triangleright

Remarques 14.1.14

1. La formule de Taylor-Young ne nous donne qu'une information locale, au voisinage de x_0 . En aucun cas elle ne peut être utilisée pour une étude globale.
2. On peut donner une hypothèse plus minimaliste : l'existence de la dérivée n -ième en x_0 suffit (si $n > 0$, sinon, il faut rajouter la continuité). On peut le démontrer par récurrence, mais cela nécessite un argument d'intégration des o .
3. La formule de Taylor-Young fournit ce qu'on appelle le *développement limité de f* au voisinage de x_0 à l'ordre n .

Note Historique 14.1.15

La formule de Taylor-Young a été démontrée par le mathématicien anglais William Henry Young (1863-1942), spécialiste de l'analyse complexe, de la théorie de la mesure et des séries de Fourier. Il ne doit pas être confondu avec Alfred Young (1873-1940), célèbre pour l'étude du groupe symétrique et de ses représentations, étude pour laquelle il introduit les tableaux qui portent son nom (tableaux de Young).

II Formules de Taylor pour les fonctions usuelles

II.1 Exponentielle

Proposition 14.2.1 (Développement limité de l'exponentielle)

La formule de Taylor-Young à l'ordre n au point 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante, au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Provient de l'expression des dérivées successives. ▷

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer :

Théorème 14.2.2 (Développement en série de l'exponentielle)

La fonction exponentielle est développable en série de Taylor au point 0 sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On désigne cette série sous le nom de *série exponentielle*.

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser l'ITL et les croissances comparées entre puissances et factorielles. ▷

II.2 Logarithme

Proposition 14.2.3 (Développement limité du logarithme)

La formule de Taylor-Young à l'ordre n au point 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n).$$

La formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir :

Proposition 14.2.4 (Développement en série du logarithme)

La fonction logarithme $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série de Taylor au point 0 sur l'intervalle $] -1, 1]$, et :

$$\forall x \in] -1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer par étude de fonction que sur $[0, x]$, ou $[x, 0]$ suivant le signe, $\left| \frac{x-t}{1+t} \right| < |x|$. Conclure, lorsque $x \neq 1$, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, en majorant par une suite géométrique.

Dans le cas $x = 1$, majorer $\frac{1-t}{1+t}$ par $\frac{1}{1+t}$. ▷

II.3 Fonctions trigonométriques

Proposition 14.2.5 (Développement limité de sin et cos)

Les formules de Taylor-Young au point 0 pour le sinus (à l'ordre $2n+2$) et pour le cosinus (à l'ordre $2n+1$) donnent, au voisinage de 0 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Proposition 14.2.6 (Développement en série de sin et cos)

Le sinus et le cosinus sont développables en séries de Taylor en 0, sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'ITL, les dérivées successives étant majorées par 1 (en gros, c'est le même argument que pour l'exponentielle) ▷

Remarque 14.2.7

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!},$$

ainsi la série exponentielle converge aussi vers l'exponentielle pour un paramètre imaginaire pur.

On peut alors en déduire (par exemple à l'aide d'un produit de Cauchy, voir cours sur les séries) :

Théorème 14.2.8 (Série exponentielle complexe, admis)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

◁ Éléments de preuve.

Écrire $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}e^{i\operatorname{Im}(z)}$ et faire un produit de Cauchy, justifié correctement par les propriétés de sommabilité vues en Spé. ▷

II.4 Fonctions hyperboliques

Proposition 14.2.9 (Développement limité de sh et ch)

Les formules de Taylor-Young au point 0 pour le sinus hyperbolique (à l'ordre $2n+2$) et pour le cosinus hyperbolique (à l'ordre $2n+1$) donnent, au voisinage de 0 :

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

◁ Éléments de preuve.

Directement, par expression des dérivées successives de ch et sh. ▷

Ces formules traduisent le fait que sh et ch sont les parties impaire et paire respectivement de l'exponentielle.

Proposition 14.2.10 (Développement en série de sh et ch)

Le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique sont développables en séries de Taylor en 0, sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

◁ Éléments de preuve.

Toujours pareil, par ITL, les dérivées successives en un point formant une suite périodique, donc bornée. Ou alors, le déduire du développement de l'exponentielle. ▷

Remarque 14.2.11

Il est fréquent d'étendre la définition de cos, sin, ch et sh à \mathbb{C} tout entier, en les définissant comme somme des séries correspondantes. On a alors les identités suivantes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(iz) = -i \operatorname{sh}(iz) \quad \text{et} \quad \cos(z) = \operatorname{ch}(iz),$$

donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{sh}(z) = i \sin(-iz) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(z) = \cos(-iz).$$

Les formules d'Euler restent valables :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Les formules de trigonométrie usuelles pouvant être toutes démontrées à partir des formules d'Euler, on en déduit qu'elles restent vraies dans le cas complexe. En particulier, en utilisant la correspondance complexe entre sh et sin, et entre ch et cos, on peut déduire des formules de trigonométrie circulaire toutes les formules de trigonométrie hyperbolique similaires.

II.5 Fonctions puissances

La formule générale est :

Proposition 14.2.12 (Développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

Au voisinage de 0, $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

Cas particuliers importants :

1. Pour $a \in \mathbb{N}$, on retrouve le début du développement du binôme.
2. Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

On reconnaît une troncature de série géométrique

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, on montre :

Proposition 14.2.13 (Développement en série des fonctions puissances)

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) est développable en série de Taylor en 0 sur l'intervalle $] -1, 1[$, et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral. Majorer $\frac{x-t}{1+t}$ comme pour le logarithme. Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}{n!} |x|^n$ converge vers 0 (considérer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$). ▷

Remarques 14.2.14

1. Pour $a \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme
2. Pour $a \in \mathbb{Z}_*$, on obtient ce qu'on appelle la formule du binôme négatif, qu'on peut réexprimer de la sorte (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)\cdots(k+1)x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Cette formule ne dit rien de plus que le fait qu'on peut dériver terme à terme une série géométrique. On peut encore l'exprimer plus synthétiquement de la sorte :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^k.$$

Avertissement 14.2.15

En général, on ne peut pas dériver terme à terme une série de fonctions. Vous montrerez l'année prochaine qu'on peut le faire pour les séries entières, c'est-à-dire s'exprimant sous la forme $\sum_{k=0}^n a_n x^n$. Le cas ci-dessus de la série géométrique est donc un cas particulier de cette règle plus générale.

II.6 Polynômes

Soit P un polynôme de degré n et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, applicable car P est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , le reste de Taylor au point x_0 est nul. On en déduit :

Théorème 14.2.16 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit P un polynôme de degré au plus n . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

◁ Éléments de preuve.

Formule de Taylor avec reste intégral : l'intégrale restante est nulle, car la dérivée $n + 1$ -ième de P est nulle. ▷

Ce théorème peut être démontré de manière purement algébrique, ce qui permet d'ailleurs de le généraliser à d'autres corps que \mathbb{R} .

Remarque 14.2.17

Remarquez qu'il s'agit d'un changement de variable, ou plutôt d'indéterminée : on exprime le polynôme P comme combinaison linéaire de monômes $(X - x_0)^n$. Dans le langage de l'algèbre linéaire, on dira qu'on a décomposé P sur la base $((X - x_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace des polynômes.

III Généralités sur les développements limités

III.1 Définition, exemples

Dans cette section, on se donne $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 14.3.1 (Développement limité (DL) au voisinage d'un point)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ est un développement limité à l'ordre n de f en x_0 si, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Remarque 14.3.2

On exprime généralement P_n dans la base $(1, X - x_0, (X - x_0)^2, \dots, (X - x_0)^n)$. Ainsi, un développement limité à l'ordre n sera la donnée de réels a_0, \dots, a_n tels que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le développement limité est donc une approximation polynomiale locale au voisinage d'un point. Il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus n , au voisinage d'un point donné.

La formule de Taylor-Young donne de façon immédiate :

Théorème 14.3.3 (Existence du DL de fonctions de classe \mathcal{C}^n)

Si f est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , égal au développement de Taylor-Young de f à l'ordre n .

Comme mentionné plus haut, si $n > 1$, l'existence de la dérivée n -ième suffirait en fait.

Théorème 14.3.4 (Unicité du DL)

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , alors ce développement est unique.

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, considérer la première différence de deux DL (au degré k), et obtenir $x^k = o(x^k)$. ▷

On en déduit en particulier :

Proposition 14.3.5 (DL de fonctions paires ou impaires)

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0.

1. Si f est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair ;
2. Si f est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

◁ **Éléments de preuve.**

Cas f pair : évaluer le DL en $-x$, et l'identifier au DL de x . Qu'est-ce qui autorise cette identification ?

Même principe pour f impair. ▷

Remarques 14.3.6

1. Toutes les fonctions n'admettent pas un DL en un point x_0 . Certaines fonctions peuvent admettre des DL jusqu'à un certain ordre n_0 et plus ensuite.
2. **Attention !** L'existence d'un DL à l'ordre n en x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée n -ième de f en x_0 . Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.
3. Cependant, pour les petits ordres :
 - Si f admet un DL à l'ordre 0 en x_0 , f est continue en x_0 ;
 - Si f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 , f est dérivable en x_0 ;
 - **et ça s'arrête là !**

Exemples 14.3.7

1. $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'admet pas de DL à l'ordre 1 au voisinage de 0
2. La fonction $f : t \mapsto \cos(t) + t^3 \sin \frac{1}{t}$, prolongée en 0 par $f(0) = 1$, admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en 0 ? Est-elle 2 fois dérivable en 0 ?

On peut renforcer un peu la définition des DL :

Définition 14.3.8 (DL au sens fort)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ est un développement limité au sens fort à l'ordre n de f en x_0 si, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + O((x - x_0)^{n+1}).$$

Cette définition est plus restrictive que la première, car il impose qu'il n'y ait pas, dans un développement à un ordre supérieur de f , de termes d'ordre non entier $(x - x_0)^\alpha$, $a \in]n, n + 1[$, ni de terme logarithmique du type $(x - x_0)^n \ln(x - x_0)$, etc.

La propriété d'unicité reste vraie, ainsi que l'existence (si f est $n + 1$ fois dérivable en x_0 , notez l'hypothèse plus forte!)

De la formule de Taylor-Young, nous déduisons donc les DL des fonctions usuelles. Ces DL, rappelés en fin de chapitre, serviront de briques pour la plupart des calculs de DL que nous effectuerons, grâce aux règles de calculs que nous établirons dans la suite de ce chapitre.

III.2 Restriction

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n . D'après la formule de Taylor pour les polynômes, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \dots + a_n(X - x_0)^n.$$

Cette écriture est unique (cela provient du fait qu'on justifiera plus tard que $(1, X - x_0, \dots, (X - x_0)^n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, mais peut aussi se voir comme une conséquence de l'unicité du développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0). On peut alors définir :

Définition 14.3.9 (Troncature)

Soit $P = a_0 + a_1(X - x_0) + \dots + a_n(X - x_0)^n$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $m \leq n$. La troncature de P à l'ordre m au voisinage de x_0 est le polynôme $T_{m,x_0}(P)$ défini par :

$$T_{m,x_0}(P) = a_0 + a_1(X - x_0) + \dots + a_m(X - x_0)^m.$$

Proposition 14.3.10 (Restriction)

Si f admet un DL à l'ordre n au point x_0 , alors f admet des DL à tous ordres $m \leq n$, obtenus en tronquant le DL à l'ordre n à la puissance m -ième en $(x - x_0)^m$: autrement dit, si $m \leq n$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n) \implies f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_{m,x_0}(P)(x) + o((x - x_0)^m).$$

◁ **Éléments de preuve.**

C'est juste dire que les termes qu'on oublie rentrent dans le $o((x - x_0)^m)$, ce qui provient du fait que leur exposant est strictement supérieur à m . ▷

Remarque 14.3.11

Si f n'admet pas de DL à l'ordre n_0 en x_0 , elle n'en admet pas non plus aux ordres supérieurs.

Exemple 14.3.12

Pour quels ordres $t \mapsto t^n \ln |t|$ admet-elle un DL au voisinage de 0 ?

III.3 Forme normalisée et partie principale

Pour faciliter la recherche des ordres minimaux de développement nécessaires lors de certaines opérations sur les DL, nous introduisons la forme normalisée d'un DL.

Proposition/Définition 14.3.13 (Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 , admettant à l'ordre n un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leq n$ tel que, pour h au voisinage de 0, on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m(a_0 + a_1h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m})),$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la forme normalisée du DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0 .

◁ Éléments de preuve.

Faire le changement de variable $h = x - x_0$ dans le DL (cela ramène à un DL en 0). Il suffit alors de factoriser par la puissance de h correspondant au premier terme non nul du DL (unique par unicité du DL). ▷

Remarques 14.3.14

- La forme normalisée inclut le changement de variable $h = x - x_0$. Dans la pratique, ce changement de variable est effectué de manière quasi-systématique, car il permet d'utiliser les DL des fonctions usuelles, tous donnés au voisinage de 0.
- m est l'ordre minimal pour lequel $\frac{f(x_0+h)}{h^m}$ ne tende pas vers 0 lorsque h tend vers 0. Plus précisément, $h \mapsto \frac{f(x_0+h)}{h^m}$ est prolongeable par continuité en une fonction g , non nulle en 0, et g admet un développement limité à l'ordre $n - m$ en 0, égal à

$$g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m}).$$

La forme normalisée d'un DL permet notamment d'obtenir un équivalent de f .

Proposition 14.3.15 (Équivalent déduit d'un DL)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 , telle que

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m(a_0 + a_1h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

Alors $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0h^m$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_0(x - x_0)^m$.

◁ Éléments de preuve.

Par restriction, $f(x_0 + h) = a_0h^m + o(h^m)$, puis caractérisation des équivalents par o . ▷

Ainsi, le développement limité est à voir comme une généralisation et un affinement des équivalents : l'ordre le plus grossier d'un DL non trivial fournit l'équivalent, les termes suivants du DL permettent d'affiner l'approximation donnée par l'équivalent : ces termes ne sont pas accessibles directement par le calcul d'équivalent.

Définition 14.3.16 (Partie principale)

Soit f une fonction admettant, à un certain ordre n au voisinage de x_0 , un développement limité non trivial, s'écrivant sous forme normalisée :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^m(a_0 + a_1h + \cdots + a_{n-m}h^{n-m} + o(h^{n-m})), \quad a_0 \neq 0.$$

La partie principale de f (sur l'échelle polynomiale) est la fonction $x \mapsto a_0(x - x_0)^m$. On dira dans cette situation que f admet une partie principale d'ordre m .

IV Opérations sur les développements limités

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0; les fonctions usuelles étant développées en ce point, on se ramènera en pratique systématiquement à ce cas par un changement de variable.

Pour simplifier, on note simplement T_n pour l'application linéaire $T_{n,0}$ définie ci-dessus. $T_n(P)$ est donc obtenu de P en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n dans l'écriture de P dans la base $(1, X, \dots, X^k, \dots)$.

IV.1 Somme de DL

La règle la plus simple concerne la somme.

Proposition 14.4.1 (Somme de DL)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, et P et Q deux polynômes de degré au plus n . Si au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

alors $(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$.

Autrement dit, si f et g admettent des DL à l'ordre n en 0, leur somme aussi, et ce DL est obtenu en sommant les DL de f et g .

◁ Éléments de preuve.

Somme de o .

▷

IV.2 Produit de DL

Proposition 14.4.2 (Produit de DL)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, et P et Q deux polynômes de degré au plus n . Si au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n),$$

alors $(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$.

Autrement dit, si f et g admettent des DL à l'ordre n en 0, leur produit aussi, et ce DL est obtenu en faisant le produit des DL de f et g , et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n .

◁ Éléments de preuve.

P étant borné au voisinage de x_0 , $P(x)o(x^n) = o(x^n)$. En déduire d'abord $fg(x) = PQ(x) + o(x^n)$, puis mettre à la poubelle (dans o) les termes de trop grand exposant.

▷

Exemples 14.4.3

- $\frac{\cos(x)}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.
- $(e^x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.
- $\ln(1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$.

Remarque 14.4.4

- Dans le troisième exemple ci-dessus, les termes d'ordre 4 du DL de $\ln(1+x)$ n'interviennent pas dans le résultat final. Ceci était prévisible, car la partie principale de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 est d'ordre 1, donc le terme x^4 est au moins multiplié par un terme d'ordre 1, donc fournit dans le produit des termes d'ordre au moins égal à 5.
- De façon plus générale, si le premier terme du développement de f n'est pas constant, on ne sera pas obligé d'aller jusqu'à l'ordre n pour le développement de g pour obtenir le développement à l'ordre n de fg . On pourrait établir une règle générale pour déterminer à quel ordre il convient d'aller, mais plutôt qu'une utilisation non comprise d'une règle stérile, il est préférable de réfléchir par soi-même au cas par cas.

Exemple 14.4.5

1. $(\sin(x) - x)(\cos(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$.
2. $\sin(x)^6 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9)$.

IV.3 Composition de DL**Proposition 14.4.6 (Composition de DL)**

Soit f et g des fonctions définies au voisinage de 0 telles que $f(0) = 0$, et soit $n \geq 1$. Si P et Q sont des développements limités de f et g en 0 à l'ordre n , alors $T_n(Q \circ P)$ est un DL en 0 à l'ordre n de $g \circ f$:

$$\left(f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \right) \implies g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le DL de g à $y = P(x)$, avec $y \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$ (par l'hypothèse $f(0) = 0$). Remarquer que $P(x) = O(x)$ pour contrôler de o . ▷

Exemples 14.4.7

1. $e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.
2. $e^{\cos(x)-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

Encore une fois, il n'est pas toujours nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre n pour les deux fonctions : si le plus petit terme du développement de f est x^k , un terme y^ℓ du développement contribuera à des termes en x de degré au moins $k\ell$. Ainsi, on peut se contenter de garder dans le développement de g uniquement les termes de degré ℓ tel que $k\ell \leq n$. Cela permet de diminuer l'ordre du développement de g d'un facteur multiplicatif k , ce qui est parfois bien appréciable.

La encore, on pourrait donner des règles précises, mais j'estime qu'il est préférable de réfléchir au cas par cas plutôt que d'appliquer une règle obscure.

Exemples 14.4.8

1. $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.
2. $\tan(\operatorname{sh}(x) - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$.

$$3. \sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{2} + o(x^9).$$

Méthode 14.4.9 (DL d'une réciproque)

Soit f une fonction bijective (au moins injective au voisinage de 0) de classe \mathcal{C}^n , telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Alors f^{-1} admet un DL à l'ordre n en 0. On peut le déterminer en identifiant les DL :

$$x = f^{-1} \circ f(x) + o(x^n),$$

fournissant $n + 1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de f^{-1} . L'identification est possible du fait de l'unicité du DL.

Exemple 14.4.10

Montrer que $f : x \mapsto x \cos(x)$ est injective sur un voisinage de 0, et trouver le DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (réponse $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$).

Remarque 14.4.11

1. Pourquoi considérer $f^{-1} \circ f$ plutôt que $f \circ f^{-1}$?
2. Trouver une CN sur l'ordre de la partie principale de f pour que f^{-1} admette un DL en 0 au même ordre que f .

IV.4 Quotient de DL**Proposition 14.4.12 (DL d'un inverse)**

Soit g une fonction définie sur un voisinage de 0, et ne s'annulant pas en 0. Si g admet un DL donné par le polynôme P en 0 à l'ordre n , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ aussi, et les DL à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ sont les mêmes. Autrement dit, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, alors :

$$(g(0) \neq 0 \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)) \implies \left(\frac{1}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \iff \frac{1}{P(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \right).$$

Ainsi, si $g(0) \neq 0$, pour trouver un DL de $\frac{1}{g}$ à l'ordre n , il suffit d'inverser un DL à l'ordre n de g .

◁ **Éléments de preuve.**

Former la différence $\frac{1}{g} - \frac{1}{P}$, réduire au même dénominateur, et utiliser $\frac{1}{gP} = O(1)$, par l'hypothèse faite sur $g(0)$. ▷

Méthode 14.4.13 (Calcul pratique du DL d'un quotient)

Soit g une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0, et telle que $g(0) \neq 0$. Soit P un polynôme de degré au plus n tel que au voisinage de 0, $g(x) = P(x) + o(x^n)$. Comme $g(0) \neq 0$, on a également $P(0) \neq 0$. Par conséquent, en mettant le terme constant non nul a de P en facteur, il existe un polynôme R de degré au plus n et s'annulant en 0, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(1 + R(x)).$$

On a alors, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+R(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(1-R+R^2+\dots+(-1)^n R^n)(x) + o(x^n),$$

d'après la formule de composition appliquée à $h \circ R$, où h est la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y}$. On obtient donc, au voisinage de 0, d'après la proposition précédente :

$$\frac{1}{g(x)} = T_n(1-R+R^2+\dots+(-1)^n R^n)(x) + o(x^n).$$

Il peut parfois être plus judicieux d'écrire $P = a(1-R)$, car la formule de DL de $y \mapsto \frac{1}{1-y}$ est encore plus simple.

Exemples 14.4.14 (Exemples archiclassiques, à savoir refaire jusqu'à l'ordre 5)

1. $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$.
2. $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$.

Remarque 14.4.15

Si $g(0) = 0$, et si g admet une partie principale d'ordre v , on peut mettre x^v en facteur. Dans ce cas, on est ramené à une fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{x^v}$ se prolongeant en une fonction h ne s'annulant pas en 0 : au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^v} \cdot \frac{1}{h(x)}$$

Comme on divise par x^v , on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de x . Ce n'est donc pas un DL. C'est ce qu'on appelle un développement asymptotique. On en reparlera un peu plus loin.

Exemple 14.4.16

$$\frac{1}{x^2 \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

Il existe des techniques plus efficaces que la composition pour faire le quotient de deux DL, notamment pour des ordres importants, en particulier une adaptation de la division euclidienne des polynômes, faite en inversant l'ordre (et le rôle) des monômes. C'est ce qu'on appelle la division suivant les puissances croissantes. Cette méthode est hors-programme. Pour les petits ordres, la technique exposée ci-dessus est amplement suffisante.

IV.5 Primitivation d'un DL

Proposition 14.4.17 (Primitivation d'un DL)

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Alors f admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre n , donné par :

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Il s'agit juste de primitiver $o(x^{n-1})$. Le faire par IAF (on ne peut pas le faire par intégration, on n'a pas l'hypothèse de continuité locale de f'). ▷

Méthode 14.4.18

Pour primitiver terme à terme un DL, ne pas oublier :

- de primitiver également le $o(x^{n-1})$;
- de préciser le terme constant (constante d'intégration), égal à $f(0)$.

Exemples 14.4.19

1. DL de $\text{Arctan } x$, $\text{Arcsin}(x)$ et $\text{Arccos}(x)$ en 0 à tous ordres.
2. Du même accabit, mais hors-programme : Argth , Argsh , Argch .
3. $\text{Arctan} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\text{Arctan} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$.

Remarque 14.4.20

Dans le cas de fonctions dérivables n fois en 0, la formule de primitivation de DL peut être vue comme une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young.

IV.6 Dérivation

La dérivation de DL se passe moins bien que l'intégration. En effet, contrôler l'intégrale d'un o se fait bien, par majoration : si un terme est petit, son intégrale aussi, sur un intervalle donné. En revanche, un terme peut être petit, mais avoir de très fortes variations locales (petites oscillations très pentues). Ainsi, la dérivation d'un o n'est en général pas contrôlable. Il faut de ce fait des hypothèses fortes pour pouvoir dériver un DL, en revenant à la formule de Taylor-Young.

Proposition 14.4.21 (Dérivation d'un DL)

Soit f une fonction f de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0, admettant (donc) un DL à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors f' admet un DL à l'ordre $n - 1$ en 0, égal à

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Formule de Taylor-Young appliquée à f' , exprimer les dérivées successives de f' (donc de f) en utilisant la formule de Taylor-Young appliquée à f et l'unicité des DL, qui permet d'identifier avec le DL fourni. ▷

V Développement asymptotiques

On peut également définir des « développements limités » en la variable x au voisinage de $+\infty$: dans ce cas, on se ramène à 0 par un changement de variables $y = \frac{1}{x}$. Ainsi, un DL en $+\infty$ est un polynôme en la variable $\frac{1}{x}$. On parle plutôt dans ce cas de développement asymptotique.

Exemple 14.5.1

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Un développement limité permet de comparer localement une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions $x \mapsto (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas de fonctions non bornées au voisinage d'un point, on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x - x_0)$, afin de mesurer la divergence locale. On parlera là encore de développement asymptotique d'ordre n pour une approximation du type

$$f(t) = \sum_{k=n_0}^n a_k (x - x_0)^k,$$

l'entier n_0 étant dans \mathbb{Z} .

Exemple 14.5.2

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^4).$$

Avertissement 14.5.3

Si f a un développement asymptotique commençant par un terme de degré $-k$, pour obtenir un DL à l'ordre n du produit fg , il faut augmenter l'ordre du DL de g jusqu'à $n + k$ (car on divisera ensuite par x^k). N'oubliez pas de le faire ! Encore une fois, réfléchissez bien aux ordres nécessaires pour chaque développement.

Exemples 14.5.4

1. $\frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$
2. $\frac{\sin(x) - x}{\ln(1+x) - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} + o(x^2).$

On peut être amené à affiner la comparaison, en insérant des fonctions intermédiaires entre les puissances entières x^n . La notion essentielle permettant de définir correctement des développements asymptotiques est la notion d'échelle de comparaison. Les définitions que nous allons voir généralisent toutes celles données jusqu'à présent.

Définition 14.5.5 (Échelle de comparaison, HP)

Une échelle de comparaison au voisinage de t_0 est une famille \mathcal{E} de fonctions, définies et non identiquement nulles au voisinage de t_0 , et telles que pour tout f et tout g de \mathcal{E} tels que $f \neq g$, on ait soit $f = o(g)$, soit $g = o(f)$.

Autrement dit, les fonctions de l'échelle de comparaison peuvent toutes se classer les unes par rapport aux autres, par ordre de prépondérance. Cette situation est à comparer au cas d'un ensemble totalement ordonné. On peut en fait se ramener à cette situation en considérant la relation d'ordre définie sur l'ensemble des fonctions non identiquement nulles au voisinage de 0 par $f \leq g$ si et seulement si $f = o(g)$ ou $f = g$. On pourrait aussi définir cette relation sur un ensemble quotient de l'ensemble des fonctions définies au voisinages de x_0 par la relation d'équivalence définie par $f \equiv g$ si et seulement si f et g coïncident sur un voisinage de x_0 (on parle de germes de fonctions).

Exemples 14.5.6 (Échelles de comparaison)

1. $x \mapsto (x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de x_0 (échelle polynomiale).
2. $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$
3. $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, au voisinage de 0^+ .
4. $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, au voisinage de 0^+ ou $+\infty$.
5. $x \mapsto x^\alpha \ln^\beta(x)$ au voisinage de 0^+ ou de $+\infty$.
6. $x \mapsto x^\alpha (\ln(x))^\beta (\ln(\ln(x)))^\gamma$ au voisinage de $+\infty$, etc.
7. $x \mapsto x^\alpha e^{P(x)}$, P polynôme sans terme constant

On définit alors :

Définition 14.5.7 (Développement asymptotique)

Un développement asymptotique d'une fonction f sur une échelle de comparaison \mathcal{E} au voisinage de x_0 à la précision $\varphi \in \mathcal{E}$ est la donnée d'une approximation de f de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)),$$

où la somme est finie.

Ainsi, un développement limité à l'ordre n n'est rien d'autre qu'un développement asymptotique sur l'échelle $(x \mapsto (x - x_0)^k)_{k \in \mathbb{N}}$, avec la précision $x \mapsto (x - x_0)^n$.

Exemples 14.5.8

1. $\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8}x - \frac{5}{16}x\sqrt{x} + \frac{35}{128}x^2 + o(x^2)$.
2. $\frac{\sin(x)}{1 + x\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2\sqrt{x} \ln(x) - \frac{x^3}{6} + x^4 \ln^2(x) + o(x^4)$.

La plupart des techniques précédentes s'adaptent. Il faut bien sûr être très vigilant sur la manipulation des o . On peut remarquer que la notion de partie principale se généralise aussi, mais dépend de l'échelle de comparaison choisie :

Définition 14.5.9 (Partie principale relativement à une échelle de comparaison)

Soit f une fonction admettant sur une échelle de comparaison \mathcal{E} un développement asymptotique :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \text{ ou } \psi = \varphi}} a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)).$$

Soit ψ_0 tel que $a_{\psi_0} \neq 0$, et tel que $a_\psi = 0$ pour tout ψ de \mathcal{E} vérifiant $\psi_0 = o(\psi)$. Alors la partie principale de f relativement à l'échelle de comparaison \mathcal{E} est la fonction $a_{\psi_0} \psi_0$.

Il s'agit donc de la partie prépondérante d'un développement asymptotique non trivial de f sur cette échelle.

Exemples 14.5.10

1. $\sqrt{x} + x^2 + x^3$ sur l'échelle $(x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, au voisinage de 0
2. $\sqrt{x} + x^2 + x^3$ sur l'échelle $(x^\alpha(1 + x))_{\alpha \in \mathbb{R}}$, au voisinage de 0.

VI Applications

VI.1 Courbes polynomiales asymptotes à une courbe

Méthode 14.6.1 (Recherche de courbes polynomiales asymptotes)

Pour trouver les courbes polynomiales (par exemple les droites) asymptotes à la courbe de f en $+\infty$, il suffit de faire un DA à l'ordre 0 de f en $+\infty$. En effet, les termes de degré négatifs de ce DA forment une partie polynomiale. On obtient donc (en cas d'existence d'un tel DA), pour un certain $m \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_m \left(\frac{1}{x}\right)^{-m} + \cdots + a_0 + o(1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_m x^m + \cdots + a_0 + o(1).$$

Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0) = 0$. Par définition, cela revient à dire que la courbe polynomiale d'équation $y = a_m x^m + \cdots + a_0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Méthode 14.6.2 (Position de la courbe par rapport à une courbe asymptote)

Pour trouver la position de la courbe de f par rapport à une courbe polynomiale asymptote (par exemple une droite asymptote), il suffit d'étudier le signe du terme de plus petit exposant strictement positif) dans le DA. Par exemple, si ce terme est le terme de degré 1, on va obtenir, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{donc:} \quad f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b}{x}.$$

Ainsi, $f(x) - (a_m x^m + \cdots + a_0)$ est du signe de $\frac{b}{x}$ au voisinage de $+\infty$, donc du signe de b ; cela fournit la position, au voisinage de $+\infty$ de la courbe de f par rapport à la courbe polynomiale asymptote $x \mapsto a_m x^m + \cdots + a_0$.

Exemple 14.6.3

Montrer que la parabole d'équation $y = ex^2 + \frac{e}{2}x - \frac{e}{24}$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$, et que la courbe de f est au-dessus de l'asymptote (le terme d'ordre 1 est $\frac{e}{48x}$).

VI.2 Extréma

Supposons que f admet un DL à un certain ordre $k \geq 1$ au voisinage de x_0 , de la forme : $f(x) = a_0 + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, avec $a_k \neq 0$. Alors

- f admet un point critique en x_0 si et seulement si $k > 1$
- la courbe de f présente alors un extremum en x_0 si et seulement si k est pair; il s'agit d'un maximum si $a_k < 0$ et d'un minimum si $a_k > 0$.

En d'autres termes :

Proposition 14.6.4 (Étude d'un point critique)

Soit f admettant en x_0 un point critique. Alors :

- f admet un extremum en x_0 si et seulement si la partie principale de $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ au voisinage de x_0 est d'ordre pair;
- dans ce cas, si ax^α désigne cette partie principale, f admet un minimum local en x_0 si $a > 0$ et un maximum local si $a < 0$.

◁ Éléments de preuve.

L'équivalence avec la partie principale et la propriété de conservation du signe permettent de conclure.

▷

Ainsi, pour savoir si f admet un extremum local en un point critique x_0 , il suffit de trouver le premier terme non nul de degré strictement positif du DL de f en x_0

VII Développement limités des fonctions usuelles

Les développements limités suivants sont à bien connaître. Les dernières lignes sont les cas particuliers les plus fréquents de la formule du DL de $(1+x)^\alpha$.

Théorème 14.7.1 (DL des fonctions classiques)

1. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$.
3. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
4. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
5. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
6. $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
7. $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
8. $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
9. $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
10. $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.
11. $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$.
12. $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.
13. $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
14. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$

Séries numériques

Si sur une grandeur d , on prend la moitié, puis la moitié de la moitié puis encore la moitié du reste, et ainsi de suite sans limitation de divisions, la grandeur obtenue en additionnant une moitié de chaque division successive (division appelée dichotomie) ne pourra jamais être égale exactement à la distance d . Avant d'arriver à son but, un mobile doit arriver à la moitié de son parcours. Mais auparavant, il doit arriver à la moitié de la moitié... Le mobile doit parcourir une quantité infinie d'unités d'espace. Il n'arrivera donc jamais à son but.

(Aristote, paradoxe de la dichotomie, dérivé du paradoxe de Zénon d'Élée)

Les séries divergentes sont une invention du diable, et c'est une honte de les utiliser dans la moindre démonstration

(Niels Abel)

Qu'est-ce qu'une série ? Répondre à cette question pose un certain nombre de problèmes. Intuitivement, ainsi que nous l'avons vu, une série est un objet collectant les différentes sommes des premiers termes d'une suite. Autrement dit, il s'agit d'un point de vue sur les suites, différent du point de vue usuel, puisqu'il s'agit ici de considérer les suites au travers de leurs sommes partielles. Mais comment définir de façon spécifique un objet qui existe déjà, et dont on veut simplement modifier le point de vue ?

Définir une série comme un objet $\sum u_n$ de sommes de termes (u_n) nécessite de s'être donné une suite (u_n) , et de considérer les sommes partielles S_n associées à cette suite. Ainsi, une définition correcte d'une série serait de la définir comme un couple $((u_n), (S_n))$ de deux suites, la seconde correspondant à la somme partielle de la première. De la sorte, on définit la suite (u_n) (u_n est le terme général de la série) ainsi que le point de vue (le fait que l'on considère les sommes partielles). Certains auteurs se contentent de définir une série comme la suite des sommes partielles d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais cette définition sous-entend la donnée initiale d'une suite (u_n) et ne diffère donc par réellement de la définition formelle sous forme d'un couple. Même si cette définition est formellement moins rigoureuse, c'est celle-ci que nous retiendrons, afin de ne pas trop mystifier un objet somme toute assez simple à appréhender.

I Notion de série et de convergence

I.1 Définitions

Définition 15.1.1 (Série)

- (i) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou complexes. La série de terme général u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, ou plus simplement $\sum u_n$, est, avec l'abus mentionné dans l'introduction du chapitre, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

des sommes partielles de la suite (u_n) , à savoir :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

(ii) S_n est appelé somme partielle (d'ordre n) de la série $\sum u_n$, et u_n est appelé terme général de la série $\sum u_n$.

Remarques 15.1.2

1. La donnée de la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum u_n$ permet de retrouver le terme général u_n de la série, puisque

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

2. La définition se généralise de façon évidente pour des séries dont le premier terme est u_{n_0} , $n_0 \in \mathbb{N}$ (ou même $n_0 \in \mathbb{Z}$).

Avertissement 15.1.3

Attention à ne pas confondre suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et série de terme général u_n .

Définition 15.1.4 (Convergence d'une série)

(i) On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie. On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Cette quantité est appelée *somme* de la série de terme général u_n .

(ii) Une série non convergente est dite *divergente*.

(iii) Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, et soit $n \in \mathbb{N}$. Le n -ième *reste* de la série est :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

(iv) La *nature* de la série $\sum u_n$ est le fait d'être convergente ou divergente.

Remarque 15.1.5

Par convention, afin de ne pas avoir d'ambiguïté dans la terminologie, nous parlerons de série divergente également lorsque nous adopterons un point de vue dans $\overline{\mathbb{R}}$, dans le cas d'une série dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous nous autoriserons cependant parfois dans cette situation à écrire l'égalité suivante, valable dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\infty.$$

Avertissement 15.1.6

Toute série divergente ne diverge pas vers $+\infty$ ou $-\infty$!

Exemple 15.1.7

$$\sum (-1)^n$$

Nous verrons plus loin qu'une façon efficace de montrer la convergence d'une série est de la comparer à une autre série dont on connaît les propriétés de convergence. Pour cette raison, il est important de connaître les propriétés de convergence d'un certain nombre de séries de référence. De l'importance du théorème suivant !

Théorème 15.1.8 (Séries géométriques)

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$; dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

L'exemple suivant est également d'une grande importance (peut-être encore plus que les séries géométriques). Nous nous contentons de l'indiquer en exemple pour le moment : nous énoncerons un théorème plus général un peu plus tard.

Exemple 15.1.9 (Série de Riemann de paramètre 1)

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Cette série est appelée *série harmonique*

La comparaison à des séries de référence permettra d'obtenir des critères efficaces de convergence, rendant en général l'étude de la convergence des séries beaucoup plus aisée que celle des suites. Pour cette raison, il est souvent intéressant de pouvoir ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle d'une série.

Méthode 15.1.10 (Comment étudier la convergence d'une suite *via* les séries)

La convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à la convergence de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. C'est un moyen pratique de démontrer la convergence de certaines suites, en utilisant les techniques spécifiques et performantes des séries.

I.2 Propriétés liées à la convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Proposition 15.1.11

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

◁ **Éléments de preuve.**

À partir d'un certain rang, la différence des sommes partielles est constante. ▷

Théorème 15.1.12 (CN de convergence portant sur le terme général)

Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. De manière équivalente, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

◁ **Éléments de preuve.**

Écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$.

▷

Définition 15.1.13 (Divergence grossière)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge *grossièrement*.

Avertissement 15.1.14

La réciproque est fausse. Une série dont le terme général est de limite nulle peut diverger. C'est le cas par exemple de $\sum \frac{1}{n}$. Ainsi, il existe des séries divergentes sans être grossièrement divergentes.

Proposition 15.1.15 (Linéarité)

Soit λ et μ deux complexes.

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum u_n + v_n$.

◁ **Éléments de preuve.**

Linéarité des sommes finies, et propriété des limites sur les CL, appliquée aux sommes partielles. ▷

II Séries à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, sauf indication contraire, on considère des séries $\sum u_n$, à termes positifs, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. On peut transcrire facilement tout ce qui suit :

- au cas où : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n \geq 0$ ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang) : en effet deux séries ne différant que d'un nombre fini de termes ont même nature ;
- au cas d'une série à termes tous négatifs puisque $\sum a_n$ et $\sum(-a_n)$ ont même nature.

II.1 Comparaisons entre séries à termes positifs

La plupart des règles rendant l'étude des séries à terme positifs plutôt aisée résultent du résultat suivant, scholie du théorème de convergence monotone des suites.

Proposition 15.2.1 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une série à termes positifs)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors soit $\sum u_n$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

◁ **Éléments de preuve.**

La somme partielle est croissante.

▷

En particulier, on en déduit le premier résultat de comparaison des séries, duquel découle tous les autres :

Théorème 15.2.2 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

1. si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi;
2. si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi.

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

◁ **Éléments de preuve.**

La propriété précédente auquel on ajoute l'information de majoration apportée par la convergence de $\sum v_n$. ▷

Le deuxième point (si on omet le cas de divergence grossière) n'est évidemment rien de plus que la contraposée du premier.

Il faut bien comprendre qu'une série $\sum u_n$ est la somme de plein de u_n : si les u_n (positifs) sont suffisamment petits la somme ne grossit pas trop vite et converge ; si les u_n ne deviennent pas assez vite petits, en revanche, la somme grossit trop vite et diverge.

Ainsi, une inégalité du type $0 \leq u_n \leq v_n$ permet de contrôler la taille des éléments que l'on somme. Si $\sum v_n$ converge, cela signifie que les v_n restent assez petits, donc les u_n aussi. Inversement, si $\sum u_n$ diverge, cela signifie que les u_n ne deviennent pas petits assez vite, donc les v_n non plus !

II.2 Convergence absolue et semi-convergence

Avant de voir d'autres théorèmes de comparaison découlant directement du théorème ci-dessus, voyons une conséquence importante de ce théorème, permettant souvent de ramener l'étude de séries à termes quelconques à des études de séries à termes positifs. Ceci est particulièrement intéressant du fait que pour les séries à termes positifs, on dispose d'outils d'étude assez efficaces, en particulier les théorèmes de comparaison.

Définition 15.2.3 (Convergence absolue)

On dit que $\sum u_n$ converge *absolument* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Comme l'indique bien la terminologie, nous avons :

Théorème 15.2.4 (Convergence absolue entraîne convergence)

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

◁ **Éléments de preuve.**

Rappel : pour une série réelle, décomposer en partie positive et partie négative, et utiliser $0 \leq x^+ \leq |x|$ et le TCSTP. Pour les séries complexes, décomposer en partie réelle et partie imaginaire. ▷

C'est cette propriété qui permet bien souvent de ramener l'étude d'une série quelconque à l'étude d'une série à termes positifs. Ce n'est malheureusement pas toujours possible :

Avertissement 15.2.5

La réciproque est fautive. Il existe des séries convergentes, mais pas absolument convergentes.

Exemple 15.2.6

Pour $\alpha \in]0, 1]$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente, mais pas absolument convergente. On montre sa convergence en montrant que les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) de la suite de ses sommes partielles sont adjacentes.

Définition 15.2.7 (Série semi-convergente)

Si $\sum u_n$ est convergente sans être absolument convergente, on dit que la série est semi-convergente.

Ainsi, par exemple, la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

II.3 D'autres théorèmes de comparaison

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs suggère, assez logiquement, que ce qui importe pour assurer la convergence d'une série, c'est que ses termes soient suffisamment petits lorsque n devient grand, donc c'est la vitesse de convergence de u_n vers 0 : plus u_n converge vite vers 0, plus la série a de chances d'être convergente. Ceci se traduit bien par des propriétés de dominance ou de négligeabilité, fournissant notre deuxième critère de convergence. Comme les relations de dominance et de négligeabilité s'exprime par des majorations des valeurs absolues, on obtiendra même ainsi des critères de convergence absolue.

Théorème 15.2.8 (Comparaison des séries par dominance ou négligeabilité)

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconque, et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :

- la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.
- la divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.

◁ **Éléments de preuve.**

On a $|u_n| \leq Mv_n$ à partir d'un certain rang, puis TCSTP. ▷

Il paraît alors raisonnable de se dire que deux séries dont les termes généraux se comportent sensiblement de la même façon en $+\infty$ sont de même nature. Cela constitue notre troisième critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Théorème 15.2.9 (Théorème de comparaison de séries à termes positifs par équivalence)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

◁ **Éléments de preuve.**

On a $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. Cette propriété est plus généralement vraie avec $u_n = \Theta(v_n)$, à termes positifs. ▷

Avertissement 15.2.10

Ce résultat est faux si on ne suppose pas la positivité des séries !

Exemple 15.2.11

Contre-exemple dans le cas de séries à termes quelconques : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge. Pourtant : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

II.4 Comparaison entre une série et une intégrale

La somme est la version discrète de l'intégrale. Si une fonction f évolue « de façon raisonnable » entre deux valeurs entières, on peut espérer que $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont les mêmes propriétés de convergence. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que ce soit le cas.

Théorème 15.2.12 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Alors $\sum_{n \geq a} f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

◁ **Éléments de preuve.**

Encadrer f entre $f(n+1)$ et $f(n)$ sur chaque intervalle $[n, n+1]$, intégrer sur ces intervalles, sommer et utiliser la relation de Chasles pour recoller les morceaux. ▷

En d'autres termes, sous les hypothèses du théorème, la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

La méthode d'encadrement développée dans la preuve du théorème de comparaison entre séries et intégrales est à savoir mettre en pratique, car elle est utile dans d'autres circonstances, par exemple pour obtenir des équivalents de sommes partielles (en cas de divergence) ou de restes (en cas de convergence).

II.5 Séries de référence

Pour pouvoir utiliser efficacement les théorèmes de comparaison, il faut disposer d'un certain nombre de séries de référence, dont on connaît bien le comportement, et auxquelles nous pourrions comparer les autres séries. Nous avons déjà vu les séries géométriques :

Théorème 15.2.13 (Nature des séries géométriques)

La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. La convergence est alors absolue, tandis que la divergence est grossière.

On peut en déduire des propriétés de convergence d'autres séries du même type :

Exemple 15.2.14

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. La série $\sum P(n)x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| \geq 1$.

Théorème 15.2.15 (Nature des séries exponentielles)

La série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente, pour toute valeur de x (sa somme étant e^x).

◁ **Éléments de preuve.**

A été démontré par l'étude du reste de Taylor. ▷

Comme pour les série géométriques, on obtient plus généralement :

Exemple 15.2.16

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. La série $\sum P(n) \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

Enfin, la troisième famille de séries de référence est constituée des séries de Riemann.

Définition 15.2.17 (Série de Riemann)

La série de Riemann de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ est la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Du théorème de comparaison entre séries et intégrales, on déduit :

Théorème 15.2.18 (Nature des séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

◁ **Éléments de preuve.**

Dans le cas $\alpha > 0$, cela s'obtient par comparaison série-intégrale : les intégrales obtenues se calculent explicitement. Dans le cas $\alpha \leq 0$, on a divergence grossière. ▷

Voici une autre famille, généralisant les séries de Riemann, souvent prise en référence, mais hors-programme (à savoir réétudier rapidement) :

Proposition 15.2.19 (Nature des séries de Bertrand)

La série de Bertrand de paramètre $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, définie par $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, est convergente si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique.

◁ **Éléments de preuve.**

Le cas limite $\alpha = 1$ s'obtient par comparaison série-intégrale. Les autres cas s'obtiennent par comparaison à une série de Riemann, et seront développés en exemple d'application des critères de comparaison donnés dans le paragraphe suivant. ▷

Remarque 15.2.20

L'ordre de grandeur de la limite entre convergence et divergence, égal à $\frac{1}{n}$ sur l'échelle $(\frac{1}{n^\alpha})$ donnée par les séries de Riemann, peut être affinée en $\frac{1}{n \ln(n)}$ sur l'échelle donnée par les séries de Bertrand. Les séries de Bertrand peuvent en fait être généralisées en ajoutant au dénominateur d'autres termes, puissances de composées successives du logarithme. On peut montrer que la limite de convergence s'obtient, comme plus haut, pour l'ordre lexicographique, pour tous les exposants égaux à 1. Par exemple $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n) \ln^\gamma(\ln n) \ln^\delta(\ln(\ln(n)))}$ converge si et seulement si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > (1, 1, 1, 1)$.

II.6 Comparaison avec une série de Riemann

Des comparaisons avec les séries de référence, on déduit un certain nombre de critères de convergence assez efficaces. Ces critères n'étant pas explicitement au programme, il convient de bien se souvenir de la manière de les obtenir rapidement à partir des résultats généraux de comparaison. Connaître ces critères hors-programme permet toutefois de savoir rapidement comment diriger son raisonnement.

Théorème 15.2.21 (Règle de Riemann, ou règle « $n^\alpha u_n$ »)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (par exemple si elle admet une limite nulle), alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $k > 0$ (par exemple si (nu_n) admet une limite infinie), alors $\sum u_n$ diverge.

◁ Éléments de preuve.

1. On a alors $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$.
2. On a alors $\frac{1}{n} = O(u_n)$. On conclut par contraposée du théorème de comparaison.

▷

Exemple 15.2.22

Séries de Bertrand.

II.7 Comparaison avec une série géométrique

Théorème 15.2.23 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques. On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une limite ℓ . Alors :

1. Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

◁ Éléments de preuve.

1. À partir d'un certain rang, on peut majorer (u_n) par une série géométrique de raison $\ell' \in]\ell, 1[$
2. De même dans l'autre sens, ou plus simplement, (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang donc grossièrement divergente.
3. Chercher des exemples variés parmi les séries de référence.

▷

Exemples 15.2.24

1. On peut retrouver de manière élémentaire, et sans référence à la fonction exponentielle, la convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. Plus généralement, ce critère est souvent très efficace pour l'étude des séries du type $\sum a_n z^n$ (séries entières). Par exemple $\sum n \ln(n) z^n$.

III Étude de la semi-convergence

Aucun résultat théorique n'est à connaître concernant l'étude de la semi-convergence. Les résultats et méthodes développés dans ce paragraphe sont théoriquement hors-programmes, mais il est bien utile en pratique de les connaître, ainsi que la démarche permettant d'y parvenir.

III.1 Séries alternées

Le premier cas simple de semi-convergence facile à étudier est le cas de toutes les séries s'étudiant de la même façon que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. En étudiant de plus près la preuve de la convergence de cette série, on se rend compte que les propriétés nécessaires à établir cette convergence sont celles rassemblées dans la définition suivante :

Définition 15.3.1 (Série alternée)

On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée s'il existe une suite positive décroissante de limite nulle (a_n) telle que $u_n = (-1)^n a_n$.

Nous obtenons alors, par la même technique que pour $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (à développer à chaque fois) :

Théorème 15.3.2 (Théorème spécial de convergence des séries alternées, TSCSA, HP)

Toute série alternée est convergente.

◁ **Éléments de preuve.**

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont deux suites adjacentes. ▷

Avertissement 15.3.3

N'oubliez pas l'hypothèse de décroissance dans la définition des séries alternées. Sans cette hypothèse, le TSCSA entre en défaut.

Exemple 15.3.4

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ est une série dont le terme général tend vers 0 et a un signe qui alterne. Cependant elle est divergente. C'est la série que nous avons déjà utilisée pour contredire le théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes quelconques.

III.2 Critère d'Abel

Le critère d'Abel généralise le TSCSA, permettant par exemple de remplacer le signe $(-1)^n$ par un terme $\cos(\alpha n)$ ou $\sin(\alpha n)$, ou par une exponentielle complexe $e^{i\alpha n}$. En particulier, contrairement au cas des séries alternées, il est utilisable dans le cas complexe.

Théorème 15.3.5 (Critère d'Abel, HP)

1. Soit $\sum a_n b_n$ une série telle que (a_n) soit réelle positive décroissante de limite nulle, et telle que la suite (B_n) des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée. Alors $\sum a_n b_n$ converge.
2. Les suites (b_n) définies par $b_n = e^{i n \alpha}$, $\cos(n \alpha)$ et $\sin(n \alpha)$ remplissent les conditions requises, lorsque $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Faire une transformation d'Abel en écrivant $b_n = B_n - B_{n-1}$: regrouper les B_n , étudier la convergence absolue par majoration, en remarquant qu'une des hypothèses permet de se débarrasser des valeurs absolues sur les différences de a_i , ce qui nous ramène à un type de série très particulier s'étudiant très facilement.

Les cas particuliers s'obtiennent par calcul explicite et majoration de B_n . ▷

Exemples 15.3.6

1. La convergence des séries alternées peut être vu comme un cas particulier de ce théorème
2. $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ converge
3. $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si et seulement si $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

IV Calcul de sommes

Il est possible de calculer la somme d'un certain nombre de séries. Ces calculs s'avèrent en particulier très utiles en probabilités, par exemple pour le calcul d'espérances et de variances de variables aléatoires réelles discrètes.

La plupart de ces sommes peuvent être obtenues sur \mathbb{R} par les formules de Taylor. Nous avons déjà eu l'occasion d'en voir certaines lors de l'étude des formules de Taylor.

IV.1 Séries exponentielles et logarithmiques

Nous avons déjà eu l'occasion de justifier les résultats suivants :

Proposition 15.4.1 (Séries exponentielles)

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 15.4.2 (Séries logarithmiques)

$$\text{Pour tout } x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

De la première somme découle une méthode de calcul de toutes les sommes du type $\sum \frac{P(n)x^n}{n!}$, P étant un polynôme.

Méthode 15.4.3 (Calcul de $\sum \frac{P(n)x^n}{n!}$)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in \mathbb{Z}$. Soit $d = \deg(P)$.

- La famille $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \dots (X-d+1))$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. On décompose P dans cette base :
 - * soit par ajustements successifs des coefficients dominants et compensations (en partant des plus hauts degrés)
 - * soit par divisions euclidiennes successives par $X, X-1, \dots, X-d+1$.
- On est ramené à des sommes $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n!} x^n$:
 - * Supprimer les termes initiaux qui sont nuls (la somme peut commencer à $n = k$)

* Simplifier les termes $n(n-1)\dots(n-k+1)$ avec les termes supérieurs de la factorielle (il reste $(n-k)!$)

* Faire un changement de variable, nous ramenant à $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+k}}{n!} = x^k e^x$.

IV.2 Séries géométriques

Nous avons déjà obtenu la formule $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$, lorsque $|x| < 1$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, nous avons obtenu plus généralement :

Proposition 15.4.4 (Formule du binôme généralisée, Newton)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $|x| < 1$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha.$$

En particulier, pour $\alpha = -(r+1)$, où $r \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}},$$

ou encore :

Corollaire 15.4.5 (Formule du binôme négatif)

Soit $r \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r+n}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

En passant une factorielle de l'autre côté, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1)\dots(n+1)x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

La formule du binôme négatif dit donc très exactement qu'on peut dériver terme à terme la série géométrique.

Avertissement 15.4.6

En général on ne peut pas dériver terme à terme une série $\sum f_n(x)$ de fonctions. Certains théorèmes que vous verrez l'année prochaine permettent de le faire sous certaines hypothèses.

Méthode 15.4.7 (Calcul de $\sum P(n)x^n$.)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

- Soit d le degré de P . La famille $(1, X+1, (X+1)(X+2), \dots, (X+1)(X+2)\dots(X+d))$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. On décompose P dans cette base. Cela peut se faire
 - * soit par compensations successives en partant du plus haut degré, de sorte à adapter les coefficients dominants (efficace surtout en petits degrés)
 - * soit par divisions euclidiennes successives par $X+1, X+2, \dots, X+d$.

- On est alors ramené au calcul de sommes du type $\sum(n+1)\cdots(n+k)x^n$, ce qui se fait par la formule du binôme négatif.
- On peut aussi décomposer P sur la base $(1, X, (X-1), \dots, (X-d+1))$ et se ramener aux sommes $\sum n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$, relevant également des sommes du binôme négatif par changement d'indice.

V Familles sommables

Nous terminons ce chapitre par le problème du changement de l'ordre de sommation dans une série, et des conditions permettant de considérer la somme d'une famille lorsqu'il n'y a pas d'ordre de sommation naturel (donc lorsque la famille est indexée par un ensemble autre que \mathbb{N}).

V.1 Problèmes de commutativité

Avertissement 15.5.1

Il est important de retenir qu'en général, changer l'ordre des termes dans une série peut modifier la somme (et même la nature) d'une série. On peut par exemple montrer (voir exercices) qu'à partir d'une série semi-convergente quelconque, on peut obtenir, simplement en changeant l'ordre de sommation, une série convergeant vers n'importe quelle valeur fixée à l'avance, une série divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$, ainsi qu'une série divergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$. Changer l'ordre de sommation modifie donc en profondeur les propriétés d'une série en général.

Notre but est d'établir qu'en se donnant des hypothèses plus fortes, on peut changer l'ordre de sommation.

Lemme 15.5.2 (changement de l'ordre dans une série à termes positifs)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et σ une permutation de \mathbb{N} . Alors $\sum a_{\sigma(n)}$ est de même nature que $\sum a_n$ et en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En notant A_n et A_n^σ les sommes partielles de la série initiale et de la série permutée, et A et A^σ leurs sommes, éventuellement infinies montrer que pour tout n , il existe n_0 tel que

$$A_n^\sigma \leq A_{n_0} \leq A, \quad \text{puis:} \quad A^\sigma \leq A$$

La réciproque s'obtient en appliquant le sens direct avec σ^{-1} . ▷

Théorème 15.5.3 (changement de l'ordre dans une série absolument convergente)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente, et σ une permutation de \mathbb{N} . Alors $\sum a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Décomposer en partie positive et partie négative. ▷

Comme on l'a évoqué, ce résultat entre en défaut dès lors que l'hypothèse de convergence absolue n'est plus vérifiée.

Remarque 15.5.4

Ce théorème (et surtout le fait qu'il ne soit pas vérifié lorsque la convergence absolue n'est pas assurée) explique la nécessité d'imposer la convergence absolue dans la définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X . En effet, l'ordre de sommation des termes définissant l'espérance provient d'un choix arbitraire d'une numérotation des valeurs possibles prises par X . Pour que l'espérance soit bien définie, il faut que cette somme soit indépendante du choix de cette numérotation, donc de l'ordre de sommation.

V.2 Familles sommables

Nous voyons maintenant comment le théorème de commutativité de la section précédente permet de définir des sommes prises sur un ensemble dénombrable quelconque, sans s'être fixé d'ordre de sommation préalable. Cela nécessitera une hypothèse de convergence absolue, qui autorisera à choisir un ordre de sommation, tout en s'assurant que le résultat obtenu sera indépendant du choix de cet ordre de sommation. On commence par la remarque suivante : si $\sum a_n$ est absolument convergente, alors pour tout sous-ensemble fini J de \mathbb{N} , la somme finie $\sum_{i \in J} |a_j|$ est majoré par $S = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. En effet, elle est majorée par la somme partielle de rang N_0 de cette série, N_0 étant le maximum de J , cette somme partielle étant elle-même majorée par la somme totale.

Réciproquement, une série $\sum a_n$ vérifiant que l'ensemble des sommes $\sum_{j \in J} |a_j|$ est majoré est absolument convergente. En effet, les sommes partielles de la série des valeurs absolues forment une suite croissante et majorée.

Cette remarque motive la définition suivante :

Définition 15.5.5 (Famille dénombrable sommable)

Soit I un ensemble dénombrable, et $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. On dit que a est absolument sommable si l'ensemble

$$A = \left\{ \sum_{j \in J} |a_j|, J \subset I \text{ fini} \right\}$$

est majoré.

La remarque précédente, et le théorème de commutativité nous assure alors que :

Proposition/Définition 15.5.6 (Somme d'une famille sommable)

Soit I un ensemble dénombrable, et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille sommable. On définit la somme de la famille a par :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité définit bien un réel, indépendant du choix de la bijection σ .

Remarque 15.5.7

Évidemment, on a $\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sup A$, où A est l'ensemble de la définition 15.5.5.

Remarques 15.5.8

1. Dans un contexte plus général que celui dans lequel on s'est placé, il convient de définir la sommabilité autrement : une famille sera sommable de somme S si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini tel que la somme prise sur tout sous-ensemble plus gros est une ε -approximation de S .

Dans le cas de familles de réels ou de complexes, on peut montrer que la sommabilité équivaut à l'absolue sommabilité.

2. On peut définir de même la notion de sommabilité pour des familles non dénombrables (toujours en se limitant aux sommes sur des sous-ensembles finis). Cela peut avoir un côté pratique intéressant pour simplifier certaines écritures, mais cela n'apporte rien de fondamentalement neuf, puisqu'on peut montrer que toute famille sommable $(a_i)_{i \in I}$ est nulle en dehors d'un ensemble au plus dénombrable d'indices.

La définition amène directement :

Lemme 15.5.9 (Théorème de comparaison)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles telles que $|a_i| \leq |b_i|$ pour tout $i \in I$. Alors, si (b_i) est absolument sommable, il en est de même de (a_i) .

◁ **Éléments de preuve.**

Les sommes associées aux a_i sont inférieures à celles associées aux b_i .

▷

Lemme 15.5.10 (Sommabilité d'une sous-famille)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille (absolument) sommable de réels ou complexes. Alors, pour tout $I' \subset I$, la famille $(a_i)_{i \in I'}$ est (absolument) sommable. De plus,

◁ **Éléments de preuve.**

Si A' est l'ensemble des sommes finies associées à la sous-famille, on a $A' \subset A$, donc A' est aussi majorée.

▷

Lemme 15.5.11

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille (absolument) sommable de réels ou complexes. Alors $(|a_i|)_{i \in I}$ est aussi sommable, et

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sup_{J \subset I \text{ fini}} \left(\sum_{j \in J} |a_j| \right).$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \subset I$ fini tel que $\sum_{i \in I} |a_i| \leq \sum_{j \in J} |a_j| + \varepsilon$.

◁ **Éléments de preuve.**

Soit A_n^σ une somme partielle ordonnée par σ des $(|a_i|)$. Toute somme finie de $|a_i|$ est alors inférieure à un A_n^σ , donc à sa somme. Quelle inégalité cela montre-t-il ?

Par ailleurs, la somme est limite de sommes finies. Quelle inégalité cela montre-t-il ?

▷

Enfin, on a une propriété de linéarité :

Théorème 15.5.12 (Linéarité de la somme)

Soit I un ensemble dénombrable. L'ensemble E des familles réelles ou complexes indexées par I et sommables est un espace vectoriel (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}), et la somme définit une forme linéaire sur E . En d'autres termes, toute combinaison linéaire de familles sommables est sommable, et si (a_i) , (b_i) sont des familles sommables, et λ , μ des scalaires, on a :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Évident par majoration des sommes finies, et ordonnement par σ pour obtenir la somme. ▷

En particulier, ce résultat permet très souvent de se contenter de montrer certaines propriétés des familles sommables sur les familles de réels positives. On retrouve le cas général en décomposant un réel à l'aide de sa partie positive et sa partie négative et un complexe à l'aide de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

V.3 Associativité et théorème de Fubini

Le théorème suivant montre qu'on peut sommer par paquets, selon une partition de I : on peut sommer d'abord sur chaque part de la partition puis sommer les résultats obtenus. On a équivalence des propriétés de sommabilité.

Théorème 15.5.13 (Associativité pour les familles sommables)

Soit I un ensemble au plus dénombrable, $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I , K étant au plus dénombrable. Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Alors a est (absolument) sommable si et seulement si chaque $(a_i)_{i \in I_k}$ ($k \in K$) est (absolument) sommable, de somme s_k et de somme absolue t_k , et si la famille $(t_k)_{k \in K}$ est (absolument) sommable. Dans ce cas, (s_k) est également sommable, et :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} s_k = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En décomposant en partie positive et partie négative, on peut se contenter du cas où les a_i sont positifs.

- Si les $(a_i)_{i \in I_k}$ sont sommables ainsi que (s_k) , toute somme finie de a_k est majorée par une somme finie de s_ℓ (en ne conservant que les ℓ tels que s_ℓ contienne un des a_k de la somme).
- Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, les $(a_i)_{i \in I_k}$ aussi. Il en est de même de $(a_i)_{i \in \bigcup_{k \in K} I_k}$, où k est fini, la somme étant majorée par $\sum_{i \in I} a_i$. Cela montre que les sommes finies de s_k sont majorées.
- Les majorants obtenus dans les deux sens nous donnent l'égalité des sommes.

▷

La démonstration illustre la remarque donnée à la fin de la section précédente.

Corollaire 15.5.14 (Théorème de Fubini)

Soit I et J deux ensembles (au plus) dénombrables, et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels ou complexes. Alors si $(a_{i,j})$ est sommable,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Il suffit d'écrire $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J = \bigsqcup_{j \in J} I \times \{j\}$ ▷

La sommabilité peut s'exprimer sur les sommes simples successives plutôt que sur la famille doublement indexée, en vertu du théorème d'associativité.

Propriétés des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.

Charles Hermite

Nous étudions dans ce chapitre les premières propriétés de régularité d'une fonction, à savoir la continuité, et la dérivabilité. Les études locales ayant déjà été faites en grande partie dans un chapitre antérieur, notre but sera essentiellement, après quelques rappels ou précisions, d'étudier des propriétés plus globales des fonctions continues ou dérivables sur tout un intervalle.

La plupart des résultats vus dans ce chapitre ont déjà été vus (et admis) en cours d'année. Il s'agit donc essentiellement ici de donner les preuves, et d'approfondir certains points.

Dans tout ce chapitre, on considère des applications f définies sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} .

I Fonctions continues sur un intervalle

I.1 Fonctions continues et continues par morceaux

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 16.1.1 (Fonction continue sur un intervalle)

On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout a de I .

Définition 16.1.2 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)

1. On dit que f est continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$ si et seulement s'il existe des réels $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tels que :
 - (i) f soit continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
 - (ii) f admette des limites à gauche finies en x_1, \dots, x_n et des limites à droite finies en x_0, \dots, x_{n-1} .
2. On dit que f est continue par morceaux sur un intervalle I quelconque, si pour tout segment $J \subset I$, f est continue par morceaux sur J .

Exemples 16.1.3

1. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^* prolongée par $f(0) = 0$ est-elle continue par morceaux sur \mathbb{R} ?
3. La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est-elle continue par morceaux sur $]0, 1[$?

Nous n'étudierons pas tellement les fonctions continues par morceaux dans ce chapitre. Nous les retrouverons plus tard, lorsque nous définirons l'intégrale de Riemann.

I.2 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Une première propriété importante des fonction continues sur un intervalle est le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans ce qui suit, par convention, et dans un soucis d'unification des énoncés, $f(+\infty)$ désigne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ dans le cas où cette limite existe, et de même pour $f(-\infty)$.

Théorème 16.1.4 (TVI, version 1 : existence d'un zéro)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ (avec existence des limites dans le cas de bornes infinies). Alors, si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'inverse), il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

◁ **Éléments de preuve.**

Méthode 1 : considérer $c = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}$, vérifier $f(c) = 0$ et $c \in]a, b[$. Attention à bien justifier c non infini, dans le cas où a ou b est infini.

Méthode 2 : par dichotomie, après s'être ramené au cas de bornes finies. ▷

Avertissement 16.1.5

Attention, c n'a aucune raison d'être unique!

Théorème 16.1.6 (TVI, version 2 : réalisation des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit $M = \sup_{x \in I} f(x)$ et $m = \inf_{x \in I} f(x)$. Alors f prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m, M[: \forall x_0 \in]m, M[, \exists c \in I, f(c) = x_0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer la version 1 à $f - x_0$. ▷

Théorème 16.1.7 (TVI, version 3 : image d'un intervalle)

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

◁ **Éléments de preuve.**

Obtenir la convexité de $\text{Im}(f)$ à partir de la version 2. ▷

Le théorème des valeurs intermédiaire affirme plus ou moins que pour passer d'un côté à l'autre d'une droite, sans lever le crayon, on est bien obligé à un moment de croiser cette droite!

Note Historique 16.1.8

Le théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé théorème de Bolzano, a été démontré par Bolzano à l'aide de la borne supérieure, mais à un moment où, la construction de \mathbb{R} n'ayant pas encore été précisée, les propriétés fondamentales de \mathbb{R} restaient mal fondées. Cauchy dans son cours d'analyse, donne le résultat sans preuve rigoureuse, se contentant d'un dessin. Peano prouve le résultat par dichotomie à la fin du 19^e siècle.

I.3 Continuité uniforme

La notion de continuité traduit le fait que localement, $f(x)$ approche $f(a)$ à ε près fixé arbitrairement à l'avance. L'aspect local de cette approximation se traduit par η intervenant dans la définition : η nous donne le domaine de validité de l'approximation. Plus η est petit, plus il faut rester proche de x pour que l'approximation soit correcte. La taille de ce domaine de validité peut d'ailleurs dépendre de x . En général, il n'y a pas de raison de pouvoir trouver un réel η convenant pour toutes les valeurs de x du domaine de définition d'une fonction continue. Cela signifie que, une marge ε étant donnée, il peut exister des points pour lesquels il faudra rester très très proche (infiniment proche si on fait tendre x vers un des bords du domaine) de x pour que l'approximation à ε près reste vraie.

Exemples 16.1.9

1. $x \mapsto e^x$ sur \mathbb{R} .
2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$.

Si pour tout ε , on peut trouver un η convenable pour toute valeur de x , on parlera de continuité uniforme. Remarquez qu'il ne s'agit de rien de moins que d'une interversion de quantificateurs par rapport à la définition de la continuité sur un domaine.

Définition 16.1.10 (Continuité uniforme)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble X de \mathbb{R} . On dit que f est uniformément continue sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in X^2, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le réel η est appelé *module de continuité uniforme de f pour l'approximation ε*

Proposition 16.1.11 (Critère séquentiel de la continuité uniforme)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble X de \mathbb{R} . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est uniformément continue sur X
- (ii) Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de X telles que $x_n - y_n \rightarrow 0$, on a aussi $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Le sens direct est une conséquence immédiate de la définition. de la continuité uniforme et de la convergence de suites. Réciproquement, raisonner par la contraposée. ▷

Les exemples précédents montrent qu'il existe des fonctions continues sur un intervalle sans y être uniformément continues. En revanche, cette situation est impossible sur un segment (intervalle fermé borné) :

Théorème 16.1.12 (Heine)

Soit $I = [a, b]$ un segment, et f une fonction continue sur I . Alors f est uniformément continue sur I .

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'absurde, construire (x_n) et (y_n) telles que $x_n - y_n \rightarrow 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Extraire une suite convergente de (x_n) et contredire le critère séquentiel. ▷

I.4 Extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé borné

On rappelle qu'un sous-ensemble K de \mathbb{R} est dit compact s'il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass :

Définition 16.1.13 (Compacité)

Soit $K \subset \mathbb{R}$. On dit que K est compact si de toute suite (x_n) d'éléments de K , on peut extraire une suite convergente vers un élément a de K .

Lemme 16.1.14 (Caractérisation des intervalles compacts)

Les intervalles compacts sont exactement les segments, i.e. les intervalles fermés bornés $[a, b]$.

◁ **Éléments de preuve.**

On a déjà justifié que les segments sont des compacts. Réciproquement, si I n'est pas borné, ou I n'est pas fermé, il n'est pas dur de construire une suite n'ayant pas de valeur d'adhérence dans I . ▷

Lemme 16.1.15 (Image d'un compact par une fonction continue)

Soit f une fonction définie et continue sur un compact K . Alors $f(K)$ est un compact.

◁ **Éléments de preuve.**

Prendre une suite dans $f(K)$, la relever dans K , en extraire une suite convergente et reprendre l'image par f . ▷

Corollaire 16.1.16 (Image d'un segment par une fonction continue)

Soit f continue sur un segment I . Alors $f(I)$ est un segment.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est la fusion des deux lemmes précédents, ainsi que la version 3 du TVI. ▷

Une version affaiblie, mais souvent suffisante, de ce corollaire est :

Théorème 16.1.17 (Théorème de compacité, ou théorème de la borne atteinte)

Soit $I = [a, b]$ un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé borné), et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors f est bornée, et atteint ses bornes.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est le fait que l'image est un intervalle borné, dont les bornes sont fermées (donc les bornes sont dans l'image, donc atteintes). On perd en revanche dans cet énoncé la propriété de convexité. ▷

En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum.

I.5 Autour des fonctions monotones – Théorème de la bijection

Théorème 16.1.18

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

◁ **Éléments de preuve.**

Réciproque déjà établie. Pour le sens direct, raisonner par contraposée. Si f n'est pas monotone, il existe $a < b < c$ tel que $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$, ou l'inverse. Appliquer le TVI sur chacun des deux intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$ pour contredire l'injectivité. ▷

Théorème 16.1.19

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, en supposant f croissante, on peut trouver a tel que l'une des 2 inégalités suivantes soit définie et vérifiée :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < f(a), \quad f(a) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Alors, par croissance, les valeurs intermédiaires à ces inégalités ne sont pas atteintes. Cela contredit la convexité. ▷

Ce théorème constitue une réciproque du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où f est monotone.

Avertissement 16.1.20

Le résultat peut être mis en défaut si f n'est pas monotone, par exemple en considérant $x \mapsto f = x\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) + (1-x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Définition 16.1.21

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$. Un homéomorphisme $f : A \rightarrow B$ est une application continue bijective dont la réciproque est continue.

Théorème 16.1.22 (Théorème de la bijection)

Soit I un intervalle d'extrémités a et b . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone et continue. Soit :

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

(ces limites existent car f est monotone). Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités α et β , et f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Plus précisément, la borne α de $f(I)$ est ouverte si et seulement la borne a de I est ouverte, et de même pour β .

◁ **Éléments de preuve.**

- $f(I)$ est un intervalle par TVI. Si I contient une borne, l'image de cette borne est une borne de $f(I)$. La stricte monotonie empêche que la borne de $f(I)$ soit atteinte ailleurs.
- Soit $J = f(I)$. Alors f^{-1} est monotone sur l'intervalle J , et son image est l'intervalle I . Conclure avec le théorème précédent.

▷

On affirme en particulier que si f est une fonction continue strictement monotone, elle induit une bijection sur son image, et sa réciproque est également continue.

Remarque 16.1.23

On dispose maintenant des outils adéquats pour compléter la démonstration du théorème de dérivation des réciproques. En effet, il nous restait à montrer que si f est continue sur un intervalle I et bijective, sa réciproque est continue aussi. Ceci est une conséquence du théorème de la bijection auquel on se ramène grâce au théorème 16.1.18.

II Fonctions dérivables sur un intervalle

Nous avons déjà étudié la dérivabilité en un point, ainsi que toutes les propriétés calculatoires. Nous nous contentons donc ici de l'étude des propriétés des fonctions dérivables sur tout un intervalle.

La dérivabilité d'une fonction est une hypothèse de régularité assez forte (la fonction ne peut pas être localement « hérissée »). La dérivabilité d'une fonction sur tout un intervalle a de ce fait des implications assez fortes.

II.1 Théorème de Rolle

Graphiquement, le théorème suivant est une évidence :

Théorème 16.2.1 (Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Par compacité, f admet un maximum et un minimum. Sauf si f est constante, l'un des deux est différent de $f(a)$ et $f(b)$, donc atteint en $c \in]a, b[$. ▷

On peut étendre le théorème de Rolle de plusieurs façons. Les résultats suivants sont des exercices classiques (à savoir démontrer à la demande, il ne s'agit pas de résultats du cours) :

Corollaire 16.2.2 (Rolle sur un intervalle infini d'un côté, HP)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, et telle que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Si f non constante considérer d tel que $f(d) \neq f(a)$, puis à l'aide du TVI trouver b distinct de a tels que $f(a) = f(b)$. ▷

Corollaire 16.2.3 (Rolle sur \mathbb{R} , HP)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} , et telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Même principe en coupant les infinis des deux côtés. ▷

Corollaire 16.2.4 (Rolle en cascade, HP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, n fois dérivable sur $]a, b[$, et telle qu'il existe $n + 1$ réels $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq b$ tels que $f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

◁ Éléments de preuve.

Récurrence immédiate. ▷

Note Historique 16.2.5

- Michel Rolle (1659-1719) démontre une version purement algébrique de ce théorème dans le cadre des polynômes. Il ne possède même pas à ce moment-là de la notion de dérivée : il recherche des encadrements de racines d'un polynôme en constatant qu'elles sont séparées par les racines non nulles du polynôme obtenu en multipliant chaque monôme par son degré. Cette construction purement algébrique n'est rien d'autre, après simplification par X , que la dérivée du polynôme...
- Lagrange, puis Cauchy, démontrent le théorème de Rolle dans une version plus générale, en établissant d'abord l'inégalité des accroissements finis, puis en utilisant le TVI sur f' : ils utilisent donc une hypothèse supplémentaire, la continuité de f' .
- C'est Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) qui propose le point de vue actuel, permettant de se dispenser de l'hypothèse de continuité de f' , et simplifiant considérablement la preuve du théorème des accroissements finis, le voyant comme une conséquence du théorème de Rolle plutôt que l'inverse.

II.2 Théorème des accroissements finis

Une première conséquence importante du théorème de Rolle est :

Théorème 16.2.6 (Théorème des accroissements finis, TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

◁ Éléments de preuve.

Considérer $g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ▷

Remarque 16.2.7 (Interprétation géométrique)

Il existe une tangente parallèle à la corde.

Remarquez que le TAF est une généralisation du théorème de Rolle. On a même une équivalence entre les deux propriétés, le TAF étant simplement obtenu du théorème de Rolle par ajout d'une partie affine.

Corollaire 16.2.8 (Inégalité des accroissements finis, IAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Soit M un majorant de f' sur $]a, b[$, et m un minorant de f' sur $]a, b[$. Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si M est un majorant de $|f'|$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Attention à bien considérer $a < b$ pour le premier encadrement, sans les valeurs absolues. En revanche, le rôle symétrique de a et b dans l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ nous dit qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse $a < b$ pour utiliser cette inégalité.

L'inégalité des accroissements finis nous donne un lien entre des propriétés de dérivabilité et la propriété définissant les fonctions lipschitziennes :

Définition 16.2.9 (Fonctions lipschitziennes)

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est k -lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ telle que f soit k -lipschitzienne.

Corollaire 16.2.10

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si f' est bornée sur I , alors f est lipschitzienne sur I . Plus précisément, si k est un majorant de $|f'|$, alors f est k -lipschitzienne. La réciproque est vraie pour une fonction dérivable.

En revanche, il peut exister des fonctions lipschitziennes non dérivables.

Note Historique 16.2.11

La terminologie provient du nom du mathématicien allemand Rudolf Lipschitz (1832-1903). Ces fonctions interviennent notamment dans les problèmes d'existence de solutions de certaines équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Un type particulièrement important de fonction lipschitzienne est :

Définition 16.2.12 (Fonction contractante)

Une fonction contractante sur un intervalle I est une fonction k -lipschitzienne, pour un réel $k \in [0, 1[$

Exemple 16.2.13

Par exemple, les fonctions vérifiant $|f'| \leq M < 1$ sur I sont contractante. En est-il de même si on a juste $|f'| < 1$ sur I ? Donner une condition sur l'intervalle I pour que ce soit le cas si f est de classe \mathcal{C}^1 .

Les fonctions contractantes ont un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques discrets (*i.e.* les suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$). En effet :

Théorème 16.2.14 (Systèmes dynamiques donnés par une fonction contractante, HP)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R} , et I un intervalle stable par f tel que f soit contractante sur I . Soit (u_n) une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et telle qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} \in I$. Alors (u_n) converge dans \mathbb{R} .

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer à l'aide du TAF que $|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$, où k est un coefficient de Lipschitz. En comparant à une série géométrique, en déduire que $\sum u_{n+1} - u_n$ converge. ▷

En particulier, toute fonction contractante sur un intervalle I y admet un point fixe. Dans le cas où f est dérivable, le point fixe considéré est attractif.

II.3 Variations des fonctions dérivables

Le théorème suivant, que vous connaissez bien, est intuitivement évident, si on fait le rapprochement avec les pentes des tangentes. Son aspect local provient de façon immédiate de la définition de la dérivée. Le passage du local au global peut se faire par des moyens directs (mais c'est un peu fastidieux). Il découle de façon immédiate du théorème des accroissements finis.

Théorème 16.2.15 (Caractérisation par la dérivée des variations des fonctions)

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus X$, où X est un ensemble fini. Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x_0) \geq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x_0) \leq 0$.
Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

◁ Éléments de preuve.

Pour a, b dans I , appliquer le TAF entre a et b . ▷

Corollaire 16.2.16 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $I \setminus X$ (où X est fini). Alors f est constante si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) = 0$.

II.4 Limites de dérivées et prolongements de fonctions dérivables

Une conséquence importante du théorème des accroissements finis est :

Théorème 16.2.17 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si f' admet (dans $\overline{\mathbb{R}}$) une limite en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

En particulier, si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ est finie, f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

Adaptation immédiate pour la borne b !

◁ Éléments de preuve.

Caractériser par ε la limite de f' et utiliser l'IAF sur un intervalle permettant le contrôle de f' . ▷

Théorème 16.2.18 (Théorème de la classe \mathcal{C}^n par prolongement)

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^n sur $I \setminus \{x_0\}$. Si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f peut être prolongée sur I en une fonction \tilde{f} de classe \mathcal{C}^n sur I . De plus, on aura alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{f}^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

L'existence de la limite pour $k = 0$ permet de prolonger par continuité. Le théorème de la limite de la dérivée permet de prolonger la dérivée en a par la valeur de sa limite. L'application successive du théorème de la dérivée aux différentes dérivées successives de \tilde{f} jusqu'à l'ordre $n - 1$ permet de conclure (petite récurrence à écrire). ▷

On a en fait même beaucoup mieux que cela (mais ce n'est pas au programme semble-t-il...), à ceci près qu'il ne donne de prolongement que d'un côté, contrairement au théorème précédent.

Théorème 16.2.19 (Théorème de prolongement des fonctions de classe C^n , HP)

Soit f une fonction définie et de classe C^n sur $]a, b[$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en a , alors f est prolongeable en une fonction de classe C^n sur I .

◁ **Éléments de preuve.**

Par récurrence sur n . Le démontrer d'abord pour $n = 1$ (attention, contrairement au théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas définie en x_0 ici, et on ne sait pas directement la prolonger). Pour cela, commencer par montrer que f est prolongeable par continuité en écrivant :

$$f(x) = f(y_0) + \int_{y_0}^x f'(t) dt,$$

et faire tendre x vers x_0 , sachant que f' peut être prolongé par continuité en x_0 . Cela nous ramène au théorème précédent.

Pour l'hérédité, appliquer l'HR à f' , puis le cas $n = 1$ qu'on vient de montrer pour revenir à f . ▷

Avertissement 16.2.20

On ne peut pas prolonger de la sorte une fonction en un x_0 au milieu de l'intervalle (voir le cas de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$).

III Dérivabilités de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

On a déjà vu comment étendre les notions liées à la dérivation aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans \mathbb{C} . Il est important de se souvenir que la dérivabilité d'une telle fonction est caractérisée par la dérivabilité de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Certains résultats relatifs aux fonctions dérivables sur un intervalle se généralisent également au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , mais pas tous cependant. Ainsi, par exemple les résultats liés à l'étude d'extrema ou de variations n'ont pas de sens dans ce cadre, car ils nécessiteraient la donnée d'une relation d'ordre sur \mathbb{C} . En particulier :

- Le théorème de Rolle, dont la démonstration repose sur l'existence d'un extremum, n'a pas d'équivalent pour une fonction à valeurs dans \mathbb{C} . On pourra en revanche, sous les conditions idoines, l'appliquer à la partie réelle f_1 et à la partie imaginaire f_2 , trouvant ainsi deux réels c_1 et c_2 tels que $f'_1(c_1) = 0$ et $f'_2(c_2) = 0$, mais comme c_1 et c_2 n'ont aucune raison d'être égaux, on ne pourra pas en conclure l'existence d'un réel c tel que $f'(c) = 0$. Pensez à une fonction décrivant, à vitesse constante, un cercle dans \mathbb{C} ; la dérivée sera un vecteur de norme constante, tangent au cercle, donc ne s'annulant pas. Pourtant, si entre a et b , on fait un tour complet, on aura $f(a) = f(b)$.
- Le théorème des accroissements finis, dont la démonstration repose sur le théorème de Rolle, entre également en défaut. D'ailleurs, le théorème de Rolle n'est qu'un cas particulier du théorème des accroissements finis. Là encore, sous les conditions idoines, on pourra trouver des réels c_1 et c_2 tels que $(f_1(b) - f_1(a)) = f'_1(c_1)(b - a)$ (pour la partie réelle) et $(f_2(b) - f_2(a)) = f'_2(c_2)(b - a)$ (pour la partie imaginaire), mais c_1 et c_2 étant en général distincts, on ne pourra, sauf cas exceptionnels, pas trouver de réel c tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

De façon remarquable cependant, l'inégalité des accroissements finis reste vraie :

Théorème 16.3.1 (IAF pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{C})

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$.
Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Le résultat n'est au programme que sous l'hypothèse f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

◁ Éléments de preuve.

Nous nous contentons d'une démonstration sous l'hypothèse au programme : f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Écrire dans ce cas f comme intégrale de sa dérivée.

La démonstration générale est beaucoup plus délicate, et hors-programme. ▷

Remarque 16.3.2

En particulier, les théorèmes de prolongement, basés sur l'IAF, restent vrais.

Intégration

On n'entend autre chose par somme des ordonnées d'un demi-cercle sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme [...] ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

(Blaise Pascal)

Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale.

(Henri Lebesgue)

Une autre citation, n'ayant pas beaucoup de rapport avec les intégrales, celle-là, mais faisant une référence insolite à un autre objet mathématique issu des théories de Bernhard Riemann :

Près de Shepherd's Bush, deux mille couples de Bêtas-Moins jouaient au tennis, en doubles mixtes, sur des surfaces de Riemann.

(Aldous Huxley, *Le Meilleur des Mondes*)

Le but de ce chapitre est de donner un fondement rigoureux à la théorie de l'intégration. Il existe plusieurs constructions de l'intégrale. Celle que nous donnons est historiquement la première complètement formalisée, et est due à Bernhard Riemann (1826-1866).

Note Historique 17.0.1

La notion d'intégration est ancienne, mais la théorie de l'intégration n'a vraiment été fondée que par Leibniz à la fin du 17-ième siècle. C'est lui qui introduit le symbolisme permettant de faire le lien entre dérivation et intégration. C'est à lui également qu'on doit le signe \int , représentant un S pour somme.

Il faut attendre toute la théorisation de la notion de fonction et des notions relatives à la continuité pour une formalisation rigoureuse. Il s'agit tout d'abord de la construction de l'intégrale de Riemann (1854), puis de l'intégrale de Lebesgue (1902). D'autres variantes existent.

Nous nous intéressons donc à l'approche de Riemann. L'idée sous-jacente à la construction est l'interprétation de l'intégrale comme l'aire sous la courbe. Cette aire est facile à déterminer pour des fonctions en escalier : il s'agit de la somme d'aires de rectangles. On commence donc par définir l'intégrale de fonctions en escalier, puis on définit plus généralement l'intégrale d'une fonction en l'approchant par des fonctions en escalier. La question qui se pose au passage est de savoir quelles sont les fonctions pour lesquelles cette

construction est possible (fonctions intégrables au sens de Riemann), donc quelles sont les fonctions qui peuvent être approchées d'assez près par des fonctions en escalier, (et au passage, quel sens donner à cette affirmation ?).

On commence donc par étudier les fonctions en escalier, puis on définit leur intégrale, et on étudie leurs propriétés. Seulement après, on définit la notion d'intégrabilité au sens de Riemann, et on vérifie que les propriétés sur les fonctions en escalier se transmettent au cas général. On montre que les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann, donc en particulier les fonctions continues. Enfin, on termine en précisant le lien entre primitive et intégrale. L'aspect pratique et calculatoire ayant déjà été vu dans un chapitre antérieur, nous nous en dispenserons ici.

I Intégrale des fonctions en escalier

Une fonction en escalier est une fonction constante par morceaux. Pour définir correctement les morceaux de l'intervalle $[a, b]$ sur lesquels f est constante, on introduit la notion de subdivision.

I.1 Notion de subdivision d'un intervalle

Définition 17.1.1 (subdivision d'un intervalle)

- Une *subdivision* σ de l'intervalle $[a, b]$ est une suite finie strictement croissante

$$\sigma = (a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b).$$

- L'entier n est le nombre de parts de la subdivision.
- Les intervalles $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont appelés *intervalles de la subdivision*.
- Le *pas* $p(\sigma)$ de la subdivision est la longueur du plus grand intervalle :

$$p(\sigma) = \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

On assimilera souvent une subdivision σ à l'ensemble $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$; ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'union et d'intersection de subdivisions. Quitte à réordonner les éléments, une union de subdivisions est encore une subdivision; de même pour une intersection de subdivisions. Une subdivision peut donc être vue comme un sous-ensemble *fini* de $[a, b]$ contenant a et b .

Définition 17.1.2 (Relation de raffinement)

Soit σ et τ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ est plus fine que τ , et on note $\sigma \leq \tau$ si $\tau \subset \sigma$ (autrement dit, la subdivision σ est obtenue de τ en rajoutant des points)

Théorème 17.1.3 (Le raffinement définit un ordre)

La relation \leq sur les subdivisions est une relation d'ordre.

I.2 Fonctions en escalier

En vue de construire l'intégrale par approximations, en commençant par un cas simple, nous introduisons les fonctions en escalier. Nous nous contentons dans un premier temps de l'étude des fonctions d'un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Nous généraliserons plus loin les résultats obtenus pour des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{C} .

Définition 17.1.4 (Fonctions en escalier)

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (\alpha = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Définition 17.1.5 (Subdivision associée)

Soit f une fonction en escalier. Une subdivision σ telle que dans la définition 17.1.4 est appelée *subdivision associée* à f .

Remarque 17.1.6

Il n'existe pas une unique subdivision associée à une fonction en escalier f . On peut toujours en trouver une infinité. En effet, toute subdivision plus fine qu'une subdivision associée à f sera encore associée à f .

Proposition 17.1.7 (Image d'une fonction en escalier)

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

◁ **Éléments de preuve.**

S'il y a n paliers, cela fait $2n + 1$ valeurs possibles (n pour les paliers, $n + 1$ pour les points de la subdivision). ▷

Lemme 17.1.8

Soit f une fonction en escalier de subdivision associée σ , et soit τ telle que $\tau \leq \sigma$. Alors τ est associée à f .

◁ **Éléments de preuve.**

Évident! ▷

Lemme 17.1.9

Soient f et g deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à f et g .

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer l'union d'une subdivision associée à f et d'une subdivision associée à g . ▷

Théorème 17.1.10 (Structure de l'ensemble des fonctions en escalier)

L'ensemble $\text{Esc}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

◁ **Éléments de preuve.**

La stabilité par multiplication par un scalaire est évidente, la stabilité par somme découle du lemme précédent. ▷

I.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans cette section, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition 17.1.11

Soit f une fonction en escalier, et σ une subdivision associée à f . On définit :

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i),$$

où, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f_i désigne la valeur constante de f sur l'intervalle $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$.

Remarque 17.1.12

$I(f, \sigma)$ est la somme de l'aire signée des rectangles situés entre l'axe des abscisses et les valeurs constantes de f sur chacun des intervalles $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$. C'est donc l'aire entre l'axe et la courbe.

Théorème 17.1.13

Pour toutes subdivisions σ et τ associées à f , $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$. Autrement dit, la quantité $I(f, \sigma)$ est indépendante du choix de la subdivision associée σ .

◁ Éléments de preuve.

En passant par $\sigma \cup \tau$, il suffit de montrer la propriété lorsque $\sigma \subset \tau$. C'est alors évident, en groupant dans la somme définissant $I(f, \tau)$ les termes en paquets de sorte à retrouver la subdivision σ . C'est un peu fastidieux à écrire (beaucoup d'indexations), mais géométriquement très simple à comprendre.

▷

Définition 17.1.14 (Intégrale d'une fonction en escalier)

On définit l'intégrale de la fonction en escalier f sur $[a, b]$ comme étant la valeur commune des $I(f, \sigma)$, pour les subdivisions associées σ . On note cette quantité $\int_{[a,b]} f(x) dx$, ou, plus souvent, $\int_a^b f(x) dx$. Ainsi, si σ est une subdivision quelconque associée à la fonction en escalier f , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i).$$

De la définition et d'un bon choix de subdivision découle immédiatement :

Proposition 17.1.15 (Intégrale d'une fonction nulle presque partout)

Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est nulle.

◁ Éléments de preuve.

C'est une fonction en escaliers de paliers tous nuls.

▷

Terminologie 17.1.16

Lorsque f est nulle sauf en un nombre fini de points, on dira que f est nulle presque partout, ou, en abrégé, f est nulle pp. On écrira $f \underset{pp}{=} 0$.

I.4 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

Nous supposons toujours les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 17.1.17 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, et soit $c \in]a, b[$. Alors f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

◁ Éléments de preuve.

Rajouter au besoin c dans la subdivision, et couper la somme en 2. ▷

Proposition 17.1.18 (Linéarité)

$\int_{[a,b]} : \text{Esc}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\text{Esc}([a, b])$. Autrement dit, pour toutes fonctions en escalier f et g , et tout réel λ , on a :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

◁ Éléments de preuve.

Se ramener à la linéarité de la somme, en travaillant sur une subdivision commune à f et g . ▷

En particulier, de la nullité de l'intégrale d'une fonction nulle presque partout, il découle :

Proposition 17.1.19 (Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout)

Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

◁ Éléments de preuve.

$f - g =_{pp} 0$ puis linéarité. ▷

Proposition 17.1.20 (Positivité, ou croissance, de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si f est en escalier sur $[a, b]$ et positive, $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

◁ Éléments de preuve.

Commencer par le cas $f \geq 0$: les f_i sont positifs, donc l'intégrale aussi. Reste vrai si la positivité n'est vérifiée que pp (les points de non positivité sont des points de la subdivision)

Cas $f \leq g$ en étudiant $g - f$. ▷

Proposition 17.1.21 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Alors $|f|$ est en escalier sur $[a, b]$, et :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

σ adapté à f est aussi adapté à $|f|$. On est alors ramené à l'IT pour les sommes. ▷

Définition 17.1.22 (extension de la notation intégrale)

Par convention on pose $\int_a^a f(x) \, dx = 0$, et, si $a < b$, $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$.

Alors, la relation de Chasles est vraie pour toute valeur de c , qu'elle soit ou non dans $]a, b[$, à condition que la fonction soit en escalier sur tous les intervalles considérés.

II Construction de l'intégrale de Riemann

L'idée de la construction est d'encadrer une fonction donnée le plus finement possible par des fonctions en escalier, dans l'espoir de définir l'intégrale par ces approximations. Dans un premier temps, on reste dans le cadre de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

II.1 Fonctions intégrables

Dans toute cette section, f désigne une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Notation 17.2.1

On définit :

1. $\text{Esc}_-(f) = \{g \in \text{Esc}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], g(x) \leq f(x)\}$
2. $\text{Esc}_+(f) = \{g \in \text{Esc}([a, b]) \mid \forall x \in [a, b], g(x) \geq f(x)\}$

Ainsi, $\text{Esc}_-(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier minorant f et $\text{Esc}_+(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier majorant f .

Remarquez que $\text{Esc}_-(f)$ et $\text{Esc}_+(f)$ peuvent être vides, par exemple si f n'est pas bornée.

Définition 17.2.2 (Intégrabilité au sens de Riemann)

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \text{Esc}_-(f), \exists h \in \text{Esc}_+(f), \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx < \varepsilon.$$

Remarquez que cette intégrale est forcément positive.

Proposition 17.2.3 (CN d'intégrabilité)

Pour que f soit intégrable sur $[a, b]$, il est nécessaire que f soit bornée.

◁ **Éléments de preuve.**

...car g et h le sont. ▷

On définit :

$$A_-(f) = \left\{ \int_a^b g(x) \, dx \mid g \in \text{Esc}_-(f) \right\}, \quad \text{et} \quad A_+(f) = \left\{ \int_a^b g(x) \, dx \mid g \in \text{Esc}_+(f) \right\}.$$

On note, sous réserve d'existence :

$$I_-(f) = \sup A_-(f) \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf A_+(f).$$

Théorème 17.2.4

f est intégrable si et seulement si $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent, et si $I_-(f) = I_+(f)$.

◁ **Éléments de preuve.**

- Sens direct : L'existence de $I_+(f)$ et $I_-(f)$ provient de la propriété fondamentale de \mathbb{R} (bien vérifier toutes ses hypothèses). L'inégalité $g \leq h$ toujours vérifiée avec g et h comme dans l'énoncé montre que $I_-(f) \leq I_+(f)$. La propriété d'intégrabilité montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $I_+(f) - I_-(f) < 2\varepsilon$. On en déduit $I_+(f) \leq I_-(f)$.
- Réciproque par caractérisation des bornes supérieure et inférieure, en se laissant un $\frac{\varepsilon}{2}$ de part et d'autre de $I_+(f) = I_-(f)$.

▷

Définition 17.2.5 (Intégrale de Riemann)

Si f est intégrable, on définit son intégrale comme étant la valeur commune de $I_+(f)$ et $I_-(f)$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = I_-(f) = I_+(f).$$

Proposition 17.2.6 (Critère d'intégrabilité)

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et θ telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) - \theta(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \theta(x),$$

et $\int_a^b \theta(x) \, dx \leq \varepsilon$. Dans ce cas, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| \leq \varepsilon.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Dans un sens, poser $\varphi = \frac{g+h}{2}$ et $\theta = \frac{h-g}{2}$. Dans l'autre, pose $g = \varphi - \theta$ et $h = \varphi + \theta$. ▷

Proposition 17.2.7 (Critère séquentiel d'intégrabilité)

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est intégrable si et seulement s'il existe deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (θ_n) telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

et $\int_a^b \theta_n(x) dx \rightarrow 0$. Dans ce cas, $\int_a^b \varphi_n(x) dx$ admet une limite et

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

- Prendre ε_n de plus en plus petit dans le critère précédent.
- Réciproquement, prendre n suffisamment grand pour que l'intégrale de θ_n soit inférieure à ε pour se ramener au critère précédent.

▷

Intuitivement, l'intégrale d'une fonction f représente donc l'aire sous la courbe, obtenue par approximation. Cette aire sous la courbe peut être vue comme l'aire d'un rectangle de base $[a, b]$, de hauteur égale à la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. Cela motive la définition suivante :

Définition 17.2.8 (Moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. La moyenne de f sur $[a, b]$ est la quantité définie par l'intégrale

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Le théorème des sommes de Riemann que nous verrons un peu plus loin précise cette notion de moyenne : il s'agit en fait d'une limite de la moyenne des valeurs prises par f en n points régulièrement répartis sur $[a, b]$, limite prise lorsque le nombre de points n tend vers $+\infty$.

II.2 Exemples importants de fonctions intégrables

Voici une classe importante de fonctions intégrables :

Théorème 17.2.9 (Intégrabilité des fonctions monotones)

Soit f une fonction monotone sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

◁ **Éléments de preuve.**

Encadrer f entre deux fonctions en escalier sur des subdivisions régulières de plus en plus fines (en prenant la valeur à gauche et à droite de f sur chaque intervalle). ▷

Des arguments un peu plus fins, nécessitant l'utilisation du théorème de Heine (donc de la compacité), amène l'intégrabilité de cette seconde classe de fonctions :

Théorème 17.2.10 (Intégrabilité des fonctions continues)

Soit f continue sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

◁ **Éléments de preuve.**

Encadrer de même f sur chaque part de la subdivision régulière, en remarquant que l'amplitude de cet encadrement peut être contrôlé grâce à la continuité uniforme de f . ▷

Nous verrons un peu plus loin que cela reste vrai pour les fonctions continues par morceaux. Mais auparavant, nous devons établir un certain nombre de propriétés de l'intégrale de Riemann.

Avant de quitter cette section, nous donnons un exemple de fonction bornée mais non intégrable :

Exemple 17.2.11

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors f est bornée, mais n'est pas intégrable. Plus précisément, $I_-(f) = 0$ et $I_+(f) = 1$.

II.3 Propriétés de l'intégrale**Proposition 17.2.12 (Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles)**

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel. ▷

Proposition 17.2.13 (Structure de l'ensemble des fonctions intégrables)

L'ensemble $\text{Int}([a, b])$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Proposition 17.2.14 (Linéarité de l'intégrale)

L'intégrale $\int_{[a,b]} : \text{Int}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\text{Int}([a, b])$. Autrement dit, pour toutes fonctions intégrables f et g , et tout réel λ , on a :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Les deux propriétés sont indissociables. Il s'agit de montrer la CL, ce qui est facile par critère séquentiel. La linéarité de l'intégrale en découle par bonus. ▷

Corollaire 17.2.15

Si f et g sont égales presque partout, alors f est intégrable si et seulement si g l'est, et dans ce cas, leurs intégrales sont égales.

Proposition 17.2.16 (Croissance et positivité de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si f est intégrable sur $[a, b]$ et positive, $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Comme plus haut, il suffit d'établir le cas $f \geq 0$. N'y aurait-il pas une fonction en escalier très simple dans $\text{Esc}_-(f)$ donnant le résultat de façon immédiate ? ▷

Corollaire 17.2.17 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ telle que $m \leq f \leq M$. Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Proposition 17.2.18 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$, et :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Encore par critère séquentiel. ▷

Avertissement 17.2.19

Il est important dans cette inégalité de bien respecter l'ordre des bornes : l'inégalité triangulaire n'est valable que lorsque $a < b$.

Proposition 17.2.20 (Intégrabilité d'un produit)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors le produit fg est intégrable sur $[a, b]$.

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel, avec φ_n, θ_n associés à f et φ'_n et θ'_n associés à g . Montrer qu'on peut supposer $\varphi_n \leq 2M'$, où M' est un majorant de g (sinon, remplacer les valeurs posant problème par 0, sans changer θ) Décomposer alors en $fg - f\varphi'_n + f\varphi'_n - \varphi_n\theta'_n$. ▷

II.4 Intégrales des fonctions continues par morceaux**Définition 17.2.21 (Fonctions continues par morceaux sur un segment)**

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b$ de $[a, b]$ telle que f soit continue sur tous les intervalles ouverts $] \sigma_i, \sigma_{i+1}[$ ($i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$), et admette des limites finies à droite en $\sigma_0 = a$, à droite et à gauche (pas nécessairement égales) en $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ et à gauche en $\sigma_n = b$.

On définit plus généralement la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque, même si nous n'aurons pas à nous servir de cette notion dans l'immédiat.

Définition 17.2.22 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)

Une fonction f définie sur un intervalle I est continue par morceaux sur cet intervalle si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle I .

Théorème 17.2.23 (Intégrabilité des fonctions continues par morceaux)

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est intégrable.

◁ **Éléments de preuve.**

Recoller les morceaux avec Chasles. ▷

II.5 Sommes de Riemann**Théorème 17.2.24 (Sommes de Riemann)**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Plus généralement, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^n = (\sigma_{n,k})_{k \in \llbracket 0, \ell_n \rrbracket}$ une subdivision, et supposons que $p(\sigma^n) \rightarrow 0$ et soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, \ell_n - 1 \rrbracket$, $x_{n,k}$ un élément de $[\sigma_{n,k}, \sigma_{n,k+1}]$. Alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\ell_n-1} (\sigma_{n,k+1} - \sigma_{n,k}) f(x_{n,k}).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par continuité uniforme si le pas est suffisamment petit $f(x_{n,k})$ est une $\frac{\varepsilon}{b-a}$ -approximation de $f(x)$ sur tout l'intervalle $[\sigma_{n,k}, \sigma_{n,k+1}]$, donc la somme diffère de l'intégrale de moins de ε . ▷

On utilise souvent ce théorème sur l'intervalle $[0, 1]$, avec la subdivision régulière. Cela s'écrit alors :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Seul le cas d'une fonction f continue est au programme, cas dans lequel la démonstration se simplifie notablement, en utilisant la continuité uniforme de f , mais il reste vrai pour toute fonction intégrable.

II.6 Extension des résultats aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Étant donnée une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, on peut décomposer f en $f = f_1 + i f_2$, où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles. On définit alors :

Définition 17.2.25 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_1 + i f_2$. On dit que la fonction f est intégrable si et seulement si f_1 et f_2 le sont, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f_1(t) \, dt + i \int_a^b f_2(t) \, dt.$$

On montre sans difficulté que l'ensemble des fonctions intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{C} est un espace vectoriel, et que l'intégrale est une forme linéaire. On vérifie également sans peine la relation de Chasles, ainsi que l'intégrabilité d'un produit de fonctions intégrables, en exprimant sa partie réelle et sa partie imaginaire à l'aide des parties réelles et imaginaires des deux fonctions initiales.

Par ailleurs, une fonction à valeurs dans \mathbb{C} étant continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, on récupère également de la sorte l'intégrabilité des fonctions continues par morceaux à valeurs dans \mathbb{C} .

Le seul résultat qu'il ne soit pas complètement immédiat de généraliser est l'inégalité triangulaire, qu'on peut déduire du cas réel par un argument de rotation :

Théorème 17.2.26 (Inégalité triangulaire intégrale dans \mathbb{C})

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors $|f|$ est aussi intégrable, et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En notant $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$, et en remplaçant f par $e^{-i\theta} f$, on peut se ramener au cas où $\int_a^b f(t) dt > 0$. En particulier, cette intégrale est alors égale à $\int_a^b f_r(t) dt$ et la majoration relève alors de l'IT pour des fonctions réelles. ▷

III Primitives et intégration

Nous renvoyons au chapitre 10 pour les résultats suivants :

Théorème 17.3.1 (Expression intégrale d'une primitive)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} . Alors f admet une primitive sur I . De plus, soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

En particulier, l'unique primitive F telle que $F(x_0) = 0$ est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Corollaire 17.3.2 (Théorème fondamental du calcul des intégrales)

Soit f continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Nous renvoyons également au chapitre 10 pour le tableau récapitulatif des primitives à connaître impérativement sur le bout des doigts, ainsi que pour tous les théorèmes essentiels issus du théorème fondamental, en particulier :

- Dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes
- Intégration par parties
- Changement de variable