Devoir Maison

Fonction logarithme népérien

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur] 0; +∞[par : $f(x)$ = f(x) = x + ln x 2x + 1 . On note Cf sa courbe représentative dans un repère (O;i,j) .

1. Étudier les limites de f en 0 et en +∞.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que la droite Δ d'équation y = x – ln(2) est asymptote à C en +∞.

b) Etudier la position de Cf par rapport `à Δ.

4) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α et justifier que α ∈ [1;$\frac{5}{4}$[

5. Tracer Δ et C_f .

Exercice 2

1a) Exprimer en fonction de ln 2 les nombres suivants : A = ln8 $B = ln\ \frac{1}{16}$ $C = \frac{1}{2} ln\ 16$

$D = \frac{1}{2} ln\ \frac{1}{4}$

2b) Exprimez en fonction de ln 2 et ln 3 les réels suivants : a = ln 24 $b = ln\ 144$ $C = ln\frac{8}{9}$

3c) Ecrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme : $A = 2ln\ 3 + ln\ 2 + ln\frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{2}ln\ 9 - 2ln\ 3$

2) Comparez les réels $x$et y:

$x = 3ln\ 2$ et $y = 2\ ln3$ $\qquad$ $x = ln\ 5 - ln\ 2$ et $y = ln\ 12 - ln\ 5$

3) Simplifier au maximum:

$a = ln\ (e^{2})$ $\quad b = ln(e^{3})$ $\quad c = ln\left(\frac{1}{e^{2}}\right)$ $\quad d = ln\left(\sqrt{e}\right)$ $\quad e = ln\left(e\sqrt{e}\right)$

CORRECTION DU DEVOIR MAISON

f est définie sur $] 0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln\ x\ 2x + 1$.

1. $\lim_{x \to 0} x\ 2x + 1 = 0$, et donc, par compos´ee des limites limites, $\lim_{x \to 0} \ln\ x\ 2x + 1 = -\infty$, et alors, par somme des limites, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. $\lim_{x \to +\infty} x\ 2x + 1 = \lim_{x \to +\infty} 1\ 2\ 1\ 1 + 1\ 2x = 1\ 2$, puis, par compos´ee des limites, $\lim_{x \to +\infty} \ln\ x\ 2x + 1 = \ln 1\ 2$, et alors, par somme des limites, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f(x) = x + \ln x - \ln(2x + 1)$, et donc, $f'(x) = 1 + 1\ x - 2\ 2x + 1 = 2x\ 2 + x + 1\ x(2x + 1)$. Le discriminant du trinˆome du second degŕe du numerateur est $\Delta = -7 < 0$, et donc pour tout x r´eel, $2x\ 2 + x + 1 > 0$. On a aussi, sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $2x+1 > 1 > 0$, d'o`u $f'(x) > 0$, et donc f est strictement croissante sur IR^*_+.

3. a) Pour tout x > 0, f(x) − (x − ln(2)) = x + ln x 2x + 1 − x + ln(2) = ln 2x 2x + 1 . De plus, lim x→+∞ 2x 2x + 1 = lim x→+∞ 1 1 + 1 2x = 1 et par compos´ee des limites, lim x→+∞ ln 2x 2x + 1 = 0, ce qui montre que ∆ : y = x − ln(2) est asymptote oblique à Cf en +∞. b) Pour tout x > 0, on a d'après ce qui précède f(x) − (x − ln(2)) = ln 2x 2x + 1 . Or, pour tout x > 0, on a 2x + 1 > 2x > 0, et donc, 0 < 2x 2x + 1 < 1 ⇐⇒ ln 2x 2x + 1 < 0. Ainsi, pour tout x > 0, f(x) − (x − ln(2)) < 0 et donc Cf est toujours au-dessous de ∆.

4. f est continue et strictement croissante sur IR∗ +, avec limx→0 f(x) = −∞ et lim x→+∞ f(x) = +∞. D'après le th´eor`eme de la bijection, il existe donc un unique antécédent α > de 0 par f. De plus, f(1) = 1 + ln  1 3  = 1 − ln 3 ≃ −0, 1 < 0 et f  5 4  = 5 4 + ln 514 ≃ 0, 22 > 0, et donc on sait de plus que α ∈ h 1; 5 4 h . Remarque :  `a la calculatrice, par balayage ou dichotomie, on trouve que 1, 07 < α < 1, 08

Exercice 2

1a) $A = ln\,8 = ln(2^3) = 3ln\,2$ $B = ln\frac{1}{6} = ln\,(\frac{1}{2^4}) = -\,ln(2^4) = -\,4\,ln2$

$C = \frac{1}{2}ln\,16 = \frac{1}{2}ln\left(2^4\right) = \frac{1}{2} * 4\,ln(2) = 2\,ln2$

$D = \frac{1}{2}ln\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}ln\,(2^2) = -\frac{1}{2} * 2ln(2) = -\,ln(2)$

1b) $a = ln\,24 = ln(3 * 8) = ln\,3 + ln(2^3) = ln\,3 + 3ln\,2$

$b = ln\,144 = ln(12^2) = 2ln(12) = 2ln(3 * 2^2) = 2\,[ln\,3 + ln(2^2)] = 2[ln\,3 + ln(2)] = 2\,ln\,3 + 4\,ln2$

$c = ln\frac{8}{9} = ln\,8 - ln\,9 = ln(2^3) - ln(3^2) = 3\,ln\,2 - 2\,ln\,3$

1c) A= $2ln3 + ln\,2 + ln\,\frac{1}{2} = ln(3^2) + ln(2 * \frac{1}{2}) = ln\,9 + ln(1) = ln\,9$

B= $\frac{1}{2}ln\,9 - 2\,ln\,3 = ln(\sqrt{9}) - 2ln\,3 = ln\,3 - 2ln\,3 = -\,ln\,3 = ln(\frac{1}{3})$

2) On transforme les écritures: $x = 3ln\,2 = ln(2^3) = ln\,8$et $y = 2ln\,3 = ln(3^2) = ln\,9$

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur]0;+∞[, on aura $ln\,8 < ln\,9$ c’est à dire $x < y$

on transforme l'écriture: $x = ln\,5 - ln\,2 = ln(\frac{5}{2})$ et $y = ln\,12 - ln\,5 = (\frac{12}{5})$

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur]0;+∞[, et puisque $\frac{12}{5} < \frac{5}{2}$, on aura ln $(\frac{12}{5}) < ln(\frac{5}{2})$, c'est à dire $x > y$

3) a=$ln\,(e^2) = 2ln(e) = 2 * 1 = 2$ c= $ln(\frac{1}{e^2}) = - ln(e^2) = - 2ln(e) = - 2 * 1 = - 2$

b= $ln(e^3) = 3ln(e) = 3 * 1 = 3$ d=$ln(\sqrt{e}) = ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ln(e) = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$

e=$ln(e\sqrt{e}) = ln(e) + ln(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$