Théorie des Graphes

17 Février 2021

Professeurs

OUMEZZAOUCHE Ilian
GOMILA Gustave
MARSAC Tony
avec la participation de SILVERT Maureen

Sources

- Barbazo Mathématiques Expertes terminales - Livre élève - Ed. 2020
- Algorithme de Dijkstra — Wikipédia

Plan du cours

Pré-requis

1. Savoir manipuler correctement les matrices

Objectifs

1. Modéliser une situation par un graphe
2. Modéliser une situation par une matrice
3. Utiliser le calcul matriciel pour résoudre un système d'équation à deux inconnues

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons avoir affaire aux prémices d'une notion toute particulière. Les graphes sont utilisés dans différents domaines allant de l'itinéraire choisi par une application tel que Map, à l'application directe et concrète par exemple dans le secteur de l'électricité.
Certains problèmes sont même encore d'actualité et restent sans réponses, nous verrons comment utiliser cet outil, fortement lié au concept de matrice.

I - Graphes non-orientés

1) Vocabulaire et Définitions

Définitions :

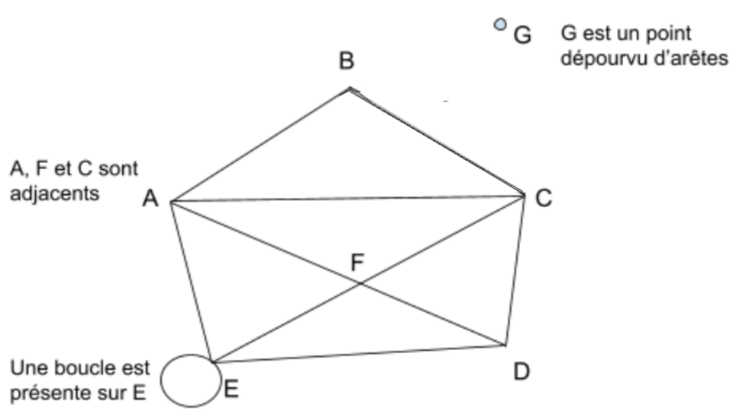
- **L'ordre** d'un graphe correspond au nombre de sommets qui le compose.
- Un graphe est dit **simple** si au plus, une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucles sur un des sommets.
- Un **graphe non orienté** G est un ensemble de sommets reliés par des arêtes
- Un **sous-graphe** G' est une partie du graphe d'origine.
- Le **degré** d'un sommet correspond au nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, en sachant que les boucles comptent double.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Une arête est une **boucle** si elle relie un sommet à lui même.

Théorème :

Dans un graphe simple non-orienté, la **somme des degrés** est égale au **double du nombre d'arêtes.**

Conséquence :

Dans le même genre de graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

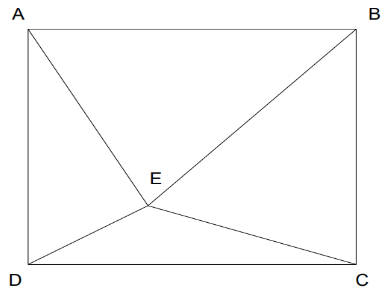


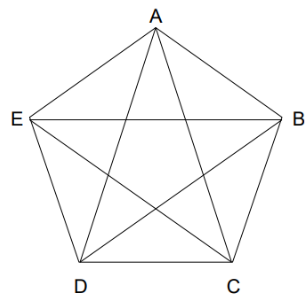
Le sommet A est de degré 4, tandis que le sommet B est de degré 2.
E est relié à lui-même, il est de degré 5.

2) Graphes complets

Définition :

Un graphe est qualifié de **complet** si tous ses sommets sont deux-à-deux adjacents.





Ce graphe n'est pas complet :
Le point A n'est pas relié à C

Ce graphe est complet :
Chaque point est relié à tout autre.

II - Parcourir un graphe non-orienté

1) Chaînes

Définitions :

Dans un graphe non-orienté, on appelle **chaîne** une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont adjacents

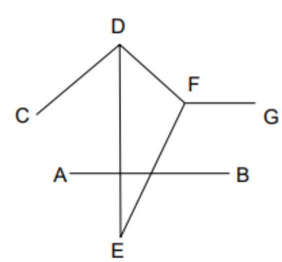
La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la compose. Une **chaîne fermée** est une chaîne dont le premier sommet est confondu avec le dernier de celle-ci. Une chaîne fermée forme un **cycle** lorsque toutes ses arêtes sont distinctes.

Un graphe est **connexe** si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Exemple : Le cas d'un graphe complet est un exemple de graphe connexe.

Le graphe ci-contre est un graphe d'ordre 7,
il n'est pas connexe car il n'existe
pas de chaînes reliant
les sommets A et F.

La chaîne C - D - F - E - D - C est
une chaîne fermée de 5,
ce n'est pas un cycle car la chaîne
passe deux fois par l'arête C - D



2) Chaînes eulériennes

Définition :

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une et une seule fois. Une **cycle eulérien** est une chaîne Eulérienne fermée.

Théorème d'Euler (admis) :

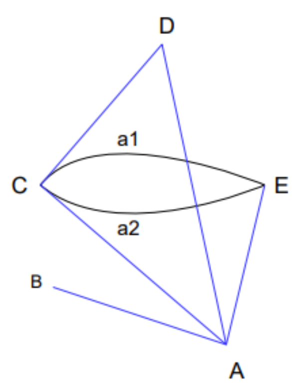
Dans le cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne Eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair s'écrit comme $2k$.

Conséquence :

Un graphe connexe admet un cycle Eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne Eulérienne.

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne Eulérienne.

ex : graphe Enveloppe



III - Graphes orientés

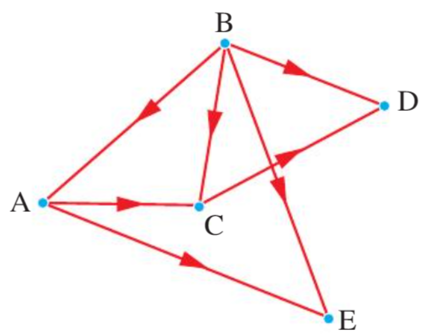
1) Définition

Définition :

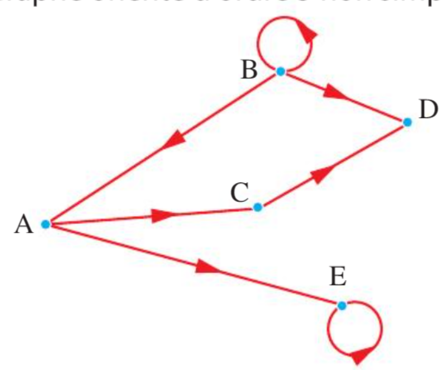
Un graphe est **orienté** lorsque toutes ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité. Une flèche indique le sens dans lequel l'arête peut être parcourue. Dans ce cas, les arêtes sont aussi appelées “arcs”, et on parle de **degré entrant** d'un sommet pour le nombre d'arcs dirigés vers le sommet et de **degré sortant** pour le nombre d'arcs partant du sommet.

Exemple:

Graphe orienté d'ordre 5 simple



Graphe orienté d'ordre 5 non simple



Remarque :

Cette définition ne peut pas s'appliquer dans un graphe d'Euler ou graphe complet, car ici par définition tout point est relié à tout autre, donc chaque liaison est nécessairement double.

2) Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition :

La matrice associée à un graphe (orienté ou non) d'ordre n est la matrice carrée de taille n, où le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Cette matrice est appelée matrice d'adjacence du graphe.

Remarque :

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est symétrique, car le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j est le même que celui reliant le sommet j au sommet i.

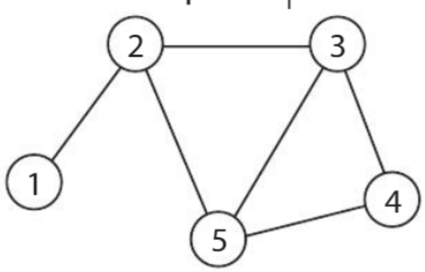
Propriété (admise) :

On considère un graphe d'ordre n et on note M sa matrice d'adjacence.

Le **nombre de chaînes** de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M^{P} noté $m_{ij}^{(p)}$.

Exemples :

Graphe G_1



Matrice d'adjacence M_1 du graphe G_1

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, on remarque qu'aucun point n'est relié à lui même, ce qui se transcrit par le fait que la diagonale soit égale à zero.

3) Algorithme de Dijkstra