

Exponentielle et logarithme népérien

Terminale Spécialité Mathématiques - Terminale Option Mathématiques complémentaires

Mohamed NASSIRI

Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = e^x$
définie sur \mathbb{R}
à valeurs dans $]0; +\infty[$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e \approx 2,718$$

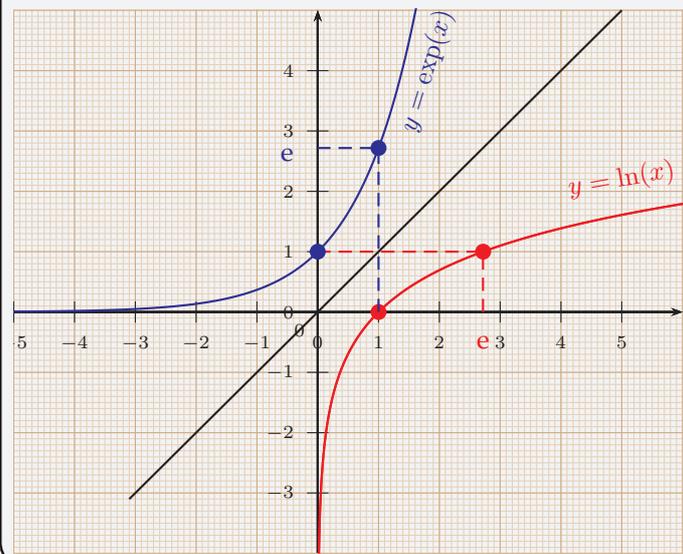
$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$
définie sur $]0; +\infty[$
à valeurs dans \mathbb{R}

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

$$\diamond \text{Produit : } e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\diamond \text{Inverse : } \frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

$$\diamond \text{Quotient : } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\diamond \text{Puissance : } (e^a)^n = e^{an}$$

$$\diamond \text{Racine carrée : } e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

$$\diamond \text{Produit : } \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\diamond \text{Inverse : } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\diamond \text{Quotient : } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\diamond \text{Puissance : } \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\diamond \text{Racine carrée : } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

$$\diamond \ln(\exp x) = x \quad \ln(e^x) = x$$

$$\diamond \exp(\ln x) = x \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\diamond \exp x = y \iff x = \ln(y) \quad e^x = y \iff x = \ln(y)$$

$$\diamond x^y = \exp(y \ln(x)) \quad x^y = e^{y \ln(x)}$$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

$$\diamond e^u = e^v \iff u = v \quad e^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$$

$$\diamond e^u > e^v \iff u > v \quad e^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$$

$$\diamond e^u \leq e^v \iff u \leq v \quad e^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$$

$$\diamond e^u \leq 0 \text{ impossible et } e^u > 0 \text{ toujours vrai}$$

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

$$\diamond \ln(u) = \ln(v) \iff u = v \quad \ln(u) = \lambda \iff u = e^\lambda$$

$$\diamond \ln(u) > \ln(v) \iff u > v \quad \ln(u) > \lambda \iff u > e^\lambda$$

$$\diamond \ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v \quad \ln(u) \leq \lambda \iff u \leq e^\lambda$$

$$\diamond \ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1 \text{ et } \ln(u) > 0 \iff u > 1$$

Croissance comparée et limites particulières

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$