

Géométrie dans l'espace

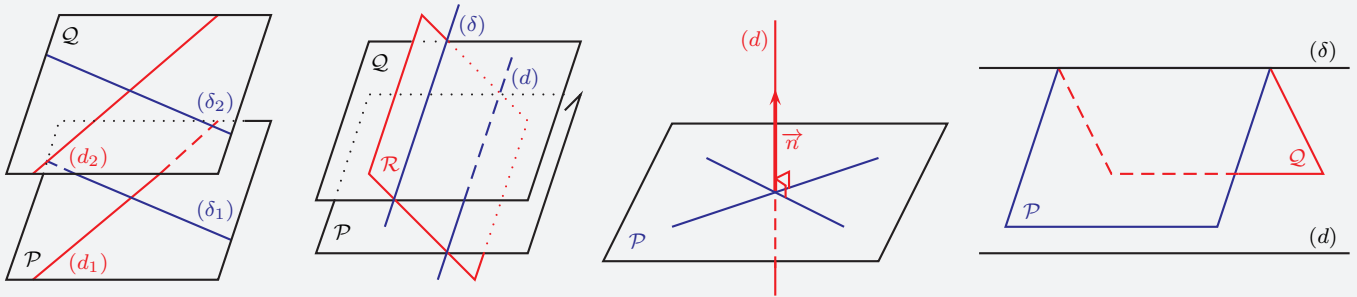
Terminale Spécialité Mathématiques

Mohamed NASSIRI

Règles d'incidence

- ✦ Si une droite (d) est parallèle à une droite (δ) d'un plan \mathcal{P} , alors la droite (d) est parallèle au plan \mathcal{P}
- ✦ Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
- ✦ Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles
- ✦ Si deux droites sécantes d'un plan \mathcal{P} sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan \mathcal{Q} , alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont parallèles
- ✦ Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles
- ✦ Une droite (d) est perpendiculaire à un plan \mathcal{P} si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan \mathcal{P} . Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan. Un vecteur \vec{n} qui dirige (d) est un vecteur normal à \mathcal{P}
- ✦ Théorème du toit : si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants \mathcal{P} et \mathcal{Q} , alors (d) est parallèle à la droite (δ) d'intersection de \mathcal{P} et de \mathcal{Q}

Illustrations des quatre dernières règles



Vecteurs

- ✦ Relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- ✦ $\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} ; \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- ✦ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ✦ \vec{u} et \vec{v} colinéaires $\iff \vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$
- ✦ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\iff \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Produit scalaire

Écritures :

- ✦ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- ✦ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- ✦ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- ✦ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

Propriétés :

- ✦ \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- ✦ Deux droites (d) et (δ) de vecteurs normaux \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonales $\iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
- ✦ Deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' de vecteurs normaux \vec{n} et \vec{n}' sont parallèles ou confondus $\iff \vec{n} = k\vec{n}'$

Coplanarité

Des points ou des droites ou des vecteurs sont coplanaires s'ils sont inclus dans le même plan

Équations de droites et de plans

Écriture vectorielle :

- ✦ $\vec{AM} = t\vec{u}$: droite passant par A de vecteur direct. \vec{u}
- ✦ $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$: plan passant par A de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires
- ✦ $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$: plan passant par A de vecteurs normal \vec{n}

Représentations paramétriques :

- ✦ Droite (d) passant A et de vecteur directeur \vec{u} :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

- ✦ Plan \mathcal{P} passant par A dirigé par \vec{u} et \vec{v} :

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, t, t' \in \mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan de vecteur normal \vec{n} :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ où } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$