

Nombres complexes

Terminale Option Mathématiques expertes

Mohamed NASSIRI

Forme algébrique

$$z = a + ib$$

- ◇ $i^2 = -1$
- ◇ $a = \Re(z) \rightarrow$ partie réelle
- ◇ $b = \Im(z) \rightarrow$ partie imaginaire
- ◇ Conjugué : $\bar{z} = a - ib$
- ◇ $\mathbb{C} = \{\text{nombres complexes}\}$

Forme trigonométrique

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

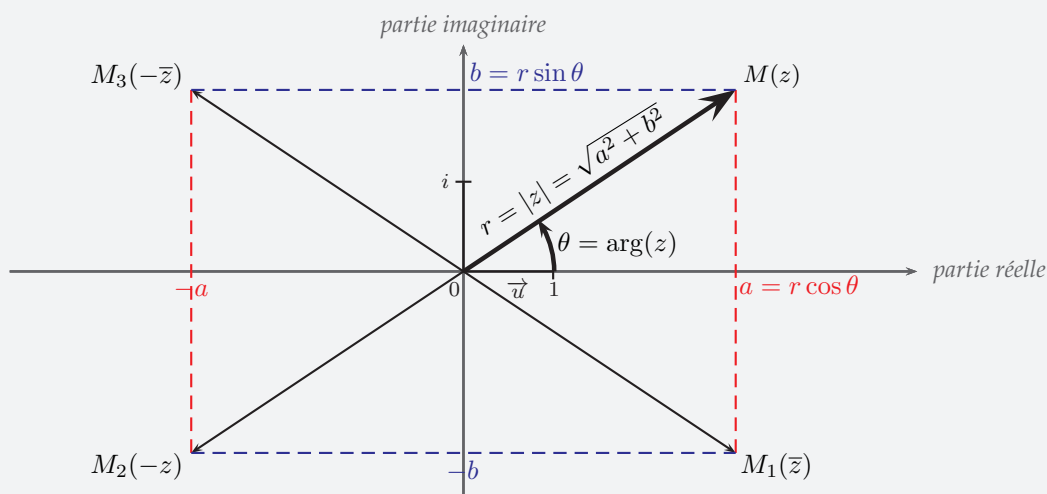
- ◇ Module :
 $|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ◇ Argument :
 $\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \vec{OM}) [2\pi]$
 $\cos \theta = \frac{a}{|z|} ; \sin \theta = \frac{b}{|z|}$

Forme exponentielle

$$z = r e^{i\theta}$$

- ◇ $r = |z| > 0$
- ◇ $\theta = \arg(z)$
- ◇ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- ◇ $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Représentation graphique



Propriétés du conjugué

- ◇ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- ◇ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- ◇ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- ◇ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- ◇ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- ◇ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$
- ◇ $z = 0 \iff \Re(z) = \Im(z) = 0$

Propriétés du module/argument

- ◇ $|-z| = |\bar{z}| = |z|$
- ◇ $|zz'| = |z| |z'|$
- ◇ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- ◇ $|z^n| = |z|^n$
- ◇ $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$
- ◇ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- ◇ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

Propriété de l'exponentielle

- ◇ $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$
- ◇ $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
- ◇ $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
- ◇ $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$
- ◇ $r e^{i\theta} = r e^{-i\theta}$

Lien complexes-géométrie

- ◇ $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$
- ◇ $|z - z_A| = r$: cercle de centre A de rayon r
- ◇ $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de [AB]
- ◇ $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- ◇ $\arg(z - z_A) = \theta [2\pi]$: demi-droite d'origine A d'angle θ
- ◇ $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- ◇ \vec{AB} et \vec{CD} orthogonaux $\iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- ◇ \vec{AB} et \vec{CD} colinéaires $\iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Lien complexes-trigonométrie

Formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
 Formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Lien complexes-second degré

- $az^2 + bz + c = 0, \Delta = b^2 - 4ac$
- ◇ $\Delta > 0$: 2 racines réelles $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - ◇ $\Delta = 0$: 1 racine double $\frac{-b}{2a}$
 - ◇ $\Delta < 0$: 2 racines conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$