

Matrices

Terminale Option Mathématiques expertes

Mohamed NASSIRI

Vocabulaire des matrices

matrice $m \times n$	matrice ligne	matrice colonne	matrice diagonale	matrice unité
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
$A = (a_{ij})$: matrice de coefficients a_{ij} (ligne i , colonne j)		$m = n$: matrice carrée d'ordre n		matrice unité : I_n ou I

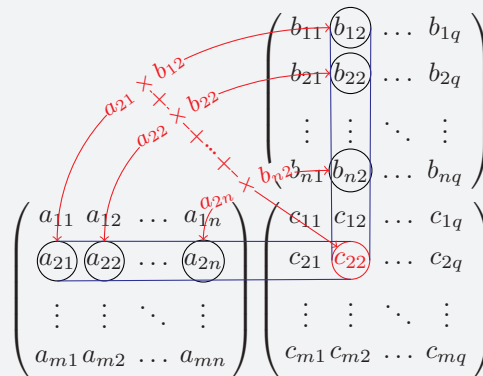
Opérations avec des matrices

$A = (a_{ij})$ est une matrice de dimension $m \times n$

$B = (b_{ij})$ est une matrice de dimension $p \times q$

Pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

- ◇ $A = B \iff m = p; n = q$ et $a_{ij} = b_{ij}$
- ◇ $C = A + B$ avec $m = p$ et $n = q$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- ◇ $C = kA$: $c_{ij} = ka_{ij}$
- ◇ $C = A \times B$: $c_{ij} =$ ligne $i|_A \times$ colonne $j|_B$
- ◇ $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ si $n \neq 0$ et $A^0 = I$



- $(kA)B = k(AB)$
- $ABC = (AB)C$
- $= A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $AI = IA = A$
- ⚠ en général : $AB \neq BA$

Inverse d'une matrice

- ◇ A matrice carrée inversible \iff il existe B tel que $AB = BA = I$
Notation : $B = A^{-1}$
- ◇ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible \iff
 $\det(A) = ad - bc \neq 0$
 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Résolution d'un système linéaire

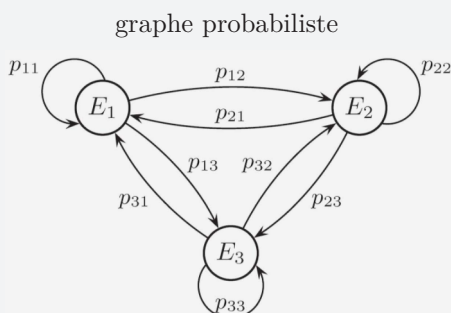
- $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$
- ◇ Écriture : $AX = B$
- ◇ Condition de solution (unique) : A inversible
- ◇ Solution : $X = A^{-1}B$

Marche aléatoire

Un système qui a n états possibles E_1, E_2, \dots, E_n qui évolue de l'un à l'autre par étapes successives aléatoires suit une marche aléatoire à n états

On note P_n la matrice ligne associée à la marche aléatoire à l'instant n

$$P_n = (P(X_n = E_1) \ P(X_n = E_2) \ \dots \ P(X_n = E_n))$$



matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

- avec : $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et
- $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$
- $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$
- $p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1$

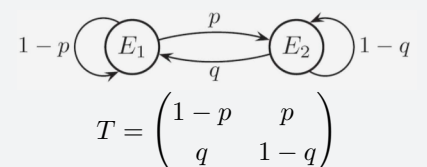
- ◇ $P_{n+1} = P_n \times T$ et $P_n = P_0 \times T^n$
- ◇ Un état probabiliste P est stable $\iff P \times T = P$

Suites $U_{n+1} = AU_n$

Une suite de matrices converge \iff toutes les suites formant les éléments de cette matrice converge

- ◇ Si $U_{n+1} = AU_n$ alors $U_n = A^n U_0$

Cas particulier de deux états



$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Si $(p; q) \neq (0; 0)$ et $(p; q) \neq (1; 1)$ alors P_n converge