

Dérivation et intégration de fonctions

Terminale Spécialité Mathématiques - Terminale Option Mathématiques complémentaires

Mohamed NASSIRI

Dérivée et tangente

Nombre dérivé de f en a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangente au point $A(a, f(a))$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Primitive

Primitive de f sur I : fonction F continue, dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Tableau dérivée-primitive

Sous condition d'existence des fonctions :

			k	x^n	\sqrt{x}	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	
		dérivée	0	$n x^{n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	primitive
	$u+v$	$u \times v$	ku	u^n	\sqrt{u}	$\frac{u}{v}$	e^u	$\ln(u)$	$\cos(u)$	$\sin(u)$	
dérivée	$u' + v'$	$u'v + uv'$	ku'	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$u' e^u$	$\frac{u'}{u}$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$	primitive

Variations d'une fonction

- ◇ f croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- ◇ f décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- ◇ f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Propriétés des primitives

- ◇ Toute fonction continue admet des primitives
- ◇ Primitives de f : fonctions G telles que $G(x) = F(x) + k$
- ◇ Si de plus $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique

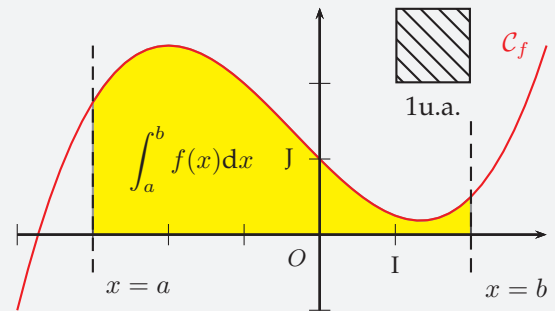
Intégrale

Intégrale de f positive sur $[a, b]$: aire du domaine délimité par la courbe représentative C_f de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale : $\int_a^b f(x) dx$

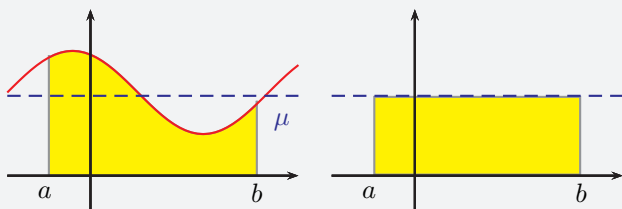
L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ

Si f est négative, l'aire vaut $-\int_a^b f(x) dx$



Calcul d'intégrales

- ◇ Soit f continue positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable de dérivée $F'(x) = f(x)$
- ◇ $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- ◇ Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$



Propriétés des intégrales

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$:

- ◇ $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ◇ $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- ◇ $f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$
- ◇ $f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- ◇ Relation de Chasles : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$