

# Dérivation et intégration de fonctions

Terminale Spécialité Mathématiques - Terminale Option Mathématiques complémentaires

Mohamed NASSIRI

## Dérivée et tangente

Nombre dérivé de  $f$  en  $a$  :  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangente au point  $A(a, f(a))$  :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

## Primitive

Primitive de  $f$  sur  $I$  : fonction  $F$  continue, dérivable sur  $I$  telle que  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in I$

## Tableau dérivée-primitive

Sous condition d'existence des fonctions :

			$k$	$x^n$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	
			0	$n x^{n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$e^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	primitive
	$u+v$	$u \times v$	$ku$	$u^n$	$\sqrt{u}$	$\frac{u}{v}$	$e^u$	$\ln(u)$	$\cos(u)$	$\sin(u)$	
dérivée	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$ku'$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$u' e^u$	$\frac{u'}{u}$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$	primitive

## Variations d'une fonction

- ◇  $f$  croissante sur  $I \iff f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$
- ◇  $f$  décroissante sur  $I \iff f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$
- ◇  $f$  constante sur  $I \iff f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$

## Propriétés des primitives

- ◇ Toute fonction continue admet des primitives
- ◇ Primitives de  $f$  : fonctions  $G$  telles que  $G(x) = F(x) + k$
- ◇ Si de plus  $F(x_0) = y_0$ , la primitive est unique

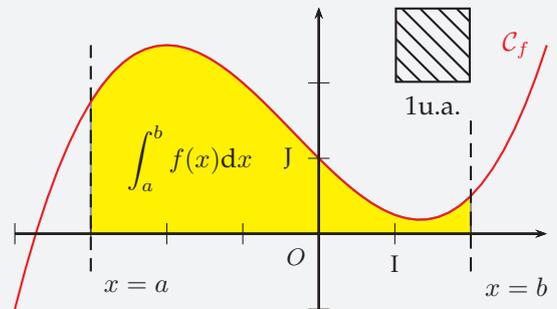
## Intégrale

Intégrale de  $f$  positive sur  $[a, b]$  : aire du domaine délimité par la courbe représentative  $C_f$  de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

On note cette intégrale :  $\int_a^b f(x) dx$

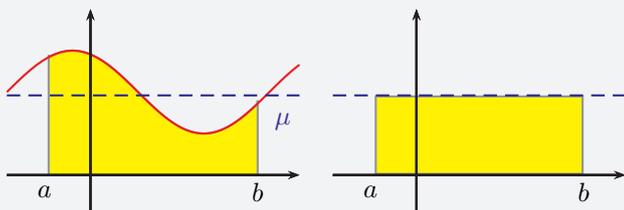
L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés  $OI$  et  $OJ$

Si  $f$  est négative, l'aire vaut  $-\int_a^b f(x) dx$



## Calcul d'intégrales

- ◇ Soit  $f$  continue positive sur  $[a, b]$ , la fonction  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable de dérivée  $F'(x) = f(x)$
- ◇  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- ◇ Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$



## Propriétés des intégrales

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$  :

- ◇  $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ◇  $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- ◇  $f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$
- ◇  $f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- ◇ Relation de Chasles :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$