DÉRIVATION ET CONVEXITÉ DES FONCTIONS

Objectifs :

• Reconnaître graphiquement les fonctions convexes et concaves.

• Utiliser le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée.

• Reconnaître graphiquement un point d’inflexion.

• Croissance comparée et positions relatives des courbes représentatives des fonctions :

Plan:

I) Définitions: fonctions convexe, fonctions concave

II) Propriétés

III) Reconnaître une fonction convexe et une fonction concave

IV) Définition et propriété du point d'inflexion

V) Convexité et croissances comparées

Introduction

⚠️***ABSENCE D’INTRODUCTION***⚠️

Rappel de Première - Tableau des dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Primitive
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$

I) Définitions : fonction convexe, fonction concave

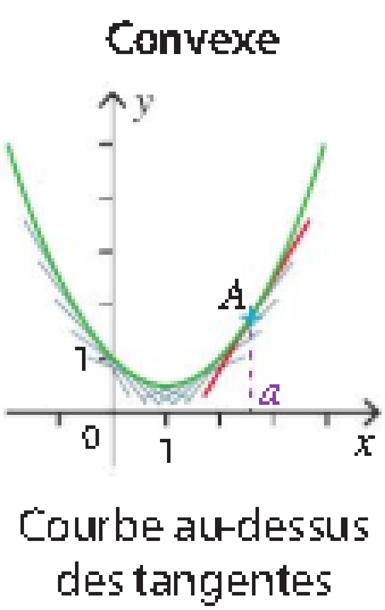
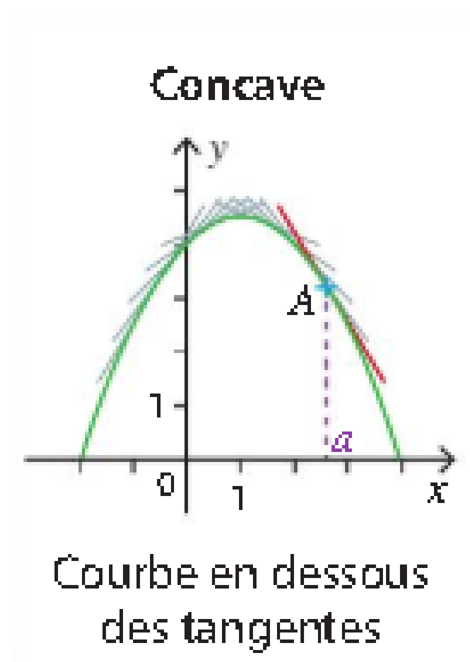
a) Définition

Fonction convexe: f est convexe sur son intervalle (I par exemple) lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Fonction concave: $f$est concave sur son intervalle (I par exemple) lorsque sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

b) Exemples

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cette fonction est convexe car nous pouvons voir que ses tangentes sont chacune au-dessus de la courbe.</td>
<td>Cette fonction est concave car nous pouvons voir que ses tangentes sont chacune en dessous de la courbe.</td>
</tr>
</table>

Source: *Barbazo Tle option Maths complémentaires Ed. 2020*

III) Propriétés

a) Définition de la dérivée seconde d'une fonction

La dérivation seconde est l'application de l'outil de dérivation à la dérivée (première) d'une fonction, soit une double dérivation sur la même variable.

La fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est elle-même dérivable sur I.
On note f'' la dérivée de f'. Elle est appelée dérivée seconde de f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -x^3 + 5x + e^x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'(x) = -3x^2 + 5x + e^x$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$f''(x) = -6x + e^x$$

f est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = -6x + e^x$

Propriétés :

La dérivée seconde est utilisée pour connaître la variation de la pente de la courbe représentant la fonction. Pour un intervalle donné :

- une dérivée seconde positive signifie une augmentation de la pente (fonction convexe)
- une dérivée seconde négative signifie une diminution de la pente (fonction concave)
- une dérivée seconde nulle signifie une courbe droite/ rectiligne

Remarque :

Mais toutes les fonctions n'ont pas de dérivée du second ordre, les fonctions non continue, et/ou non dérivable en au moins un point, n'a pas de dérivée seconde.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)$= $\frac{x^3}{3}$- x^2-3x+1.

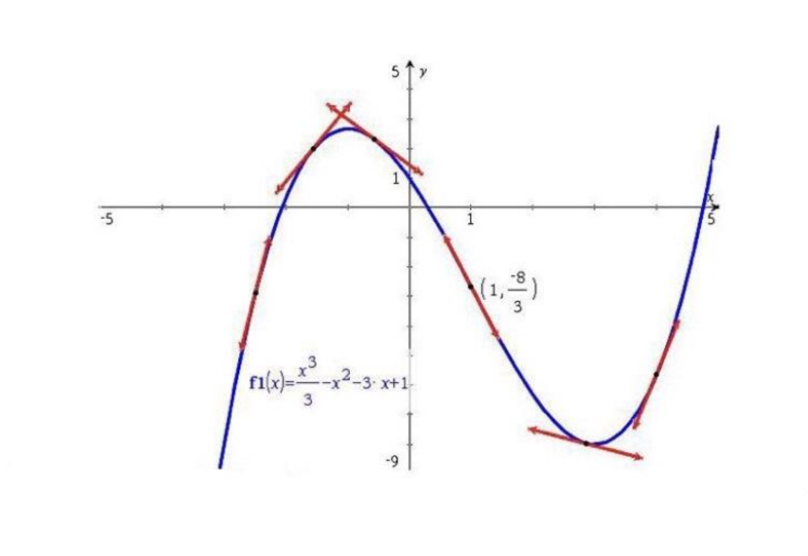
Sa dérivée première est $f'(x)$=x^2-2x-3. Sa dérivée seconde est $f'(x)$=$2x - 2 = 2(x - 1)$ avec $f''(x)$=0 pour x=1.

D'où le tableau de variations, de signe de la dérivée seconde et de convexité de la fonction :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Signe $f''(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe $f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$8/3$		$\searrow$		-8	$\nearrow$	$+\infty$
Convexité :	Concave					Convexe			

On remarque que la convexité change pour $x = 1$. Au point (1;-$\frac{8}{3}$), la courbe traverse sa tangente (elle passe dessous alors qu’elle était située au-dessus de la tangente).

Sa représentation graphique:



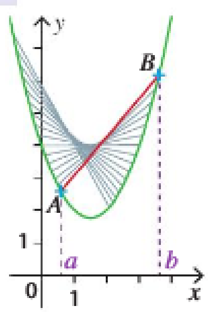
b) Propriétés des fonctions convexes et concaves

Propriété 1:

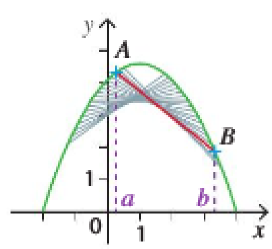
Soient f une fonction définie sur un intervalle Iet C_f sa courbe représentative dans un repère.

- f est convexe sur I si, pour tous réels a et b de I, en notant A(a; $f(a)$) et B(b; $f(b)$), la portion de la courbe C_f située entre A et B en dessous de la sécante (AB)
- f est dite concave sur I si pour tous réels a et b de I, en notant A(a, $f(a)$) et B (b, $f(b)$), la portion de la courbe C_f située entre A et B est au-dessus de la sécante (AB)

Exemples



La fonction f est convexe.



La fonction f est concave.

Remarque :

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

Exemple : Cas des fonctions de référence

- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Propriété 2 : Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle f, f' se dérivée et f'' sa dérivée seconde.

- Sur l'intervalle I: f est convexe ⇔ f'' est positive ⇔ f' est croissante.
- Sur l'intervalle I: f est concave ⇔ f'' est négative ⇔ f' est décroissante.

Exemple :

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) - 3x^2 - 5x + 1$.

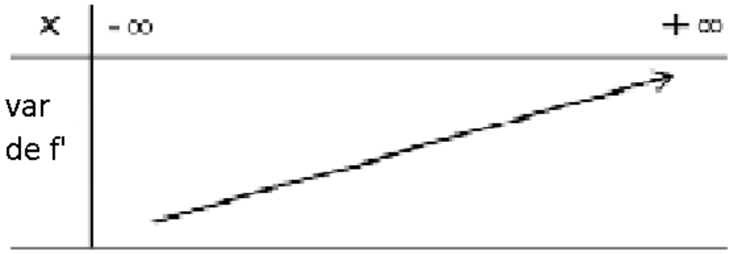
On a $f'(x) - 6x - 5$ et $f''(x) > 0$,donc $f$est convexe sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur I

- f est converse sur I⇔ f'est croissante sur I
- f est concave sur I ⇔f' est décroissante sur I

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x)$= x^2- $3x$+2. On a donc $f'(x) = 2x - 3$(qui est une fonction affine)

Tableau de variations:



Comme la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème 2 :</u> Soit f une fonction deux fois dérivable I est

- Si pour tout $x \in I$, f''>0, alors f est convexe sur I
- Si pour tout $x \in I$, f''≤0, alors f est concave sur I

<u>Exemple :</u> On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc $f'(x) = 2x$et ensuite $f''(x) = 2 \geq 0$. Donc $f$est convexe sur $\mathbb{R}$

Source : [Barbazo Tle option Maths complémentaires Ed. 2020]

III) Reconnaître une fonction convexe et une fonction concave

a) Définitions

f est convexe si et seulement si f'' est positif sur son intervalle.

f est concave sur est seulement si f'' est négatif sur son intervalle

b) Applications

f est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. En déduire si la fonction est convexe et/ou concave.

<u>Exemple :</u> On considère la fonction f *dont la dérivée seconde est définie par* $f''(x) = \frac{3x^2-3x-6}{(x-1)^3}$ sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

Pour savoir si la fonction est convexe ou concave, on va devoir faire un tableau de signe.

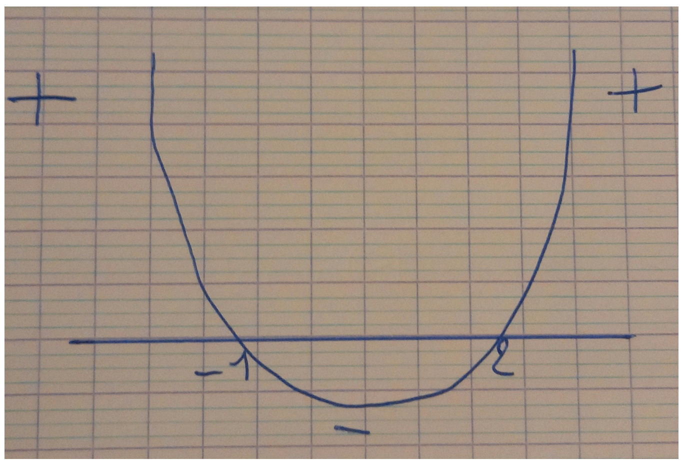
Pour le remplir, on va donc chercher à savoir tout d'abord les signe de $3x^2 - 3x - 6$:

a=3 *b=-3* *c=-6*

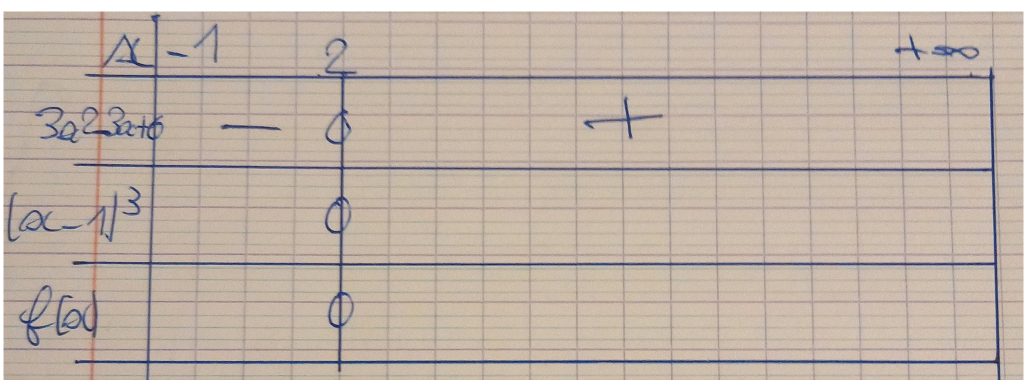
On va pour cela appliquer la formule : $\Delta = b^2 - 4ac$ = *(-3)²-4×3×(-6)=81*

On va donc calculer les deux racines :

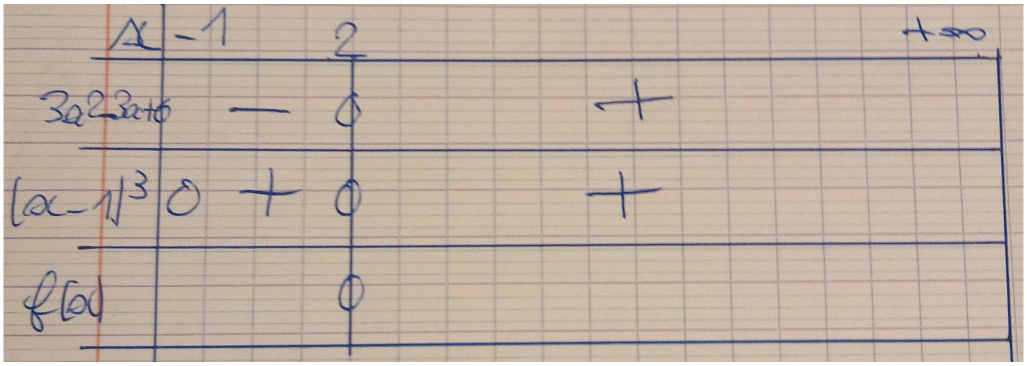
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3)-\sqrt{81}}{2*3} = -1 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3)+\sqrt{81}}{2*3} = 2$$



On remplit donc dans le tableau de signe :

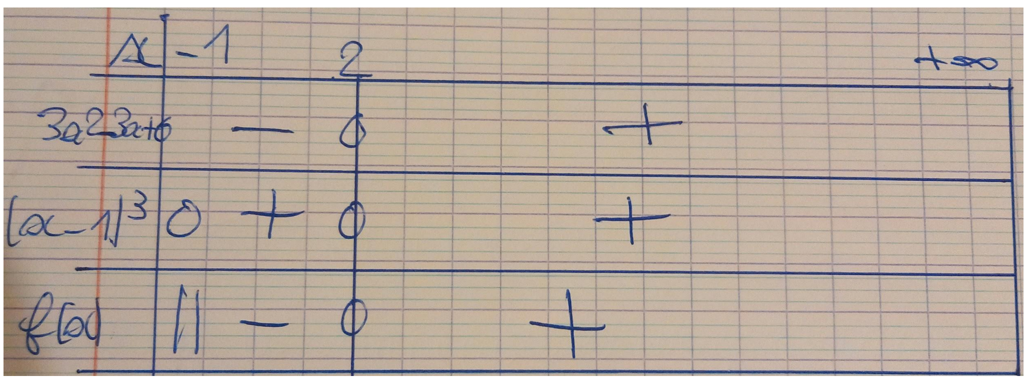


Puis, comme $x > 1$, on a $x - 1 > 0$. Donc $(x - 1)^3 > 0$. On complète le tableau :



x	-1		2		$+\infty$
$3x^2-3x+6$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$			0		

Finalement, le signe de $f''(x)$égale :



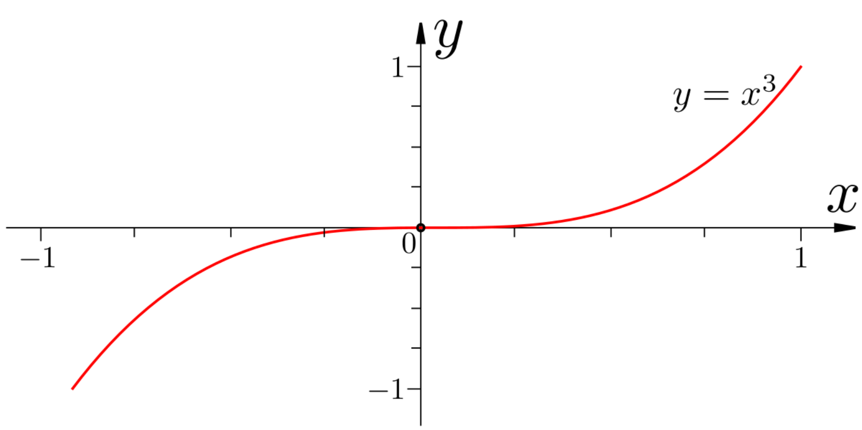
x	-1		2		$+\infty$
$3x^2-3x+6$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

On peut donc voir que F est concave sur l'intervalle $]1;2[$et convexe sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

On remarque un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 2$.

IV) Définition et propriété du point d'inflexion

Définition : Le point d'inflexion d'une courbe est le point où la courbe traverse sa tangente.



Source : Point d'inflexion - Maths terminale - Les Bons Profs

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$et donc $f''(x) = 6x - 4$.

Par suite,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Le point d'inflexion est le point d'abscisse $\frac{2}{3}$, d'ordonnée $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{17}$.

Source : Outil pour trouver un point d'inflexion - Maths - Terminale - Les Bons profs

V) Convexité et croissance comparée

⚠️ABSENCE TOTALE DE LA PARTIE⚠️