Corvée n°10 - Corrigé

Primitives et équations différentielles - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 29/03/2021

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Les choses que lon possède finissent par nous posséder. »

Tyler Durden, *Fight Club*, 1999.

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures. Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. A l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

Partie A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
   On a $f(0,5) = 35\mathrm{e}^{-0,8} - 30 \approx -14$°C.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f.
   $\forall\ t \in [0, +\infty[$,
   $$f'(t) = -1,6 \times 35\mathrm{e}^{-1,6t} + 0 = -56\mathrm{e}^{-1,6t}$$
   Or $\forall\ t \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-1,6t} > 0$ et $-56 < 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   La fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
   $f(1,5) = 35\mathrm{e}^{-2,4} - 30 \approx -27$°C. La température des ailerons sera conforme au cahier des charges.
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.
   $$\begin{aligned} f(t) = -24 \iff 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30 = -24 \iff 35\mathrm{e}^{-1,6t} = 6 &\iff \mathrm{e}^{-1,6t} = \frac{6}{35} \\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-1,6t}\right) = \ln\left(\frac{6}{35}\right) \\ &\iff -1,6t = \ln\left(\frac{6}{35}\right) \\ &\iff t = -\frac{1}{1,6}\ln\left(\frac{6}{35}\right) \\ &\iff t = -0,625\ln\left(\frac{6}{35}\right) \approx 1,10 \end{aligned}$$
   Les ailerons atteignent la température de -24° C au bout de 1 h et 6 min.

Partie B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y'+1,5y=-52,5$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+1,5y=-52,5$.
   $y'+1,5y=-52,5 \iff y'=-1,5y-52,5$
   Ce qui nous donne
   $$y=K\mathrm{e}^{-1,5t}-\frac{52,5}{1,5} \iff y=K\mathrm{e}^{-1,5t}-35$$

2. (a) Justifier que $g(0)=5$.
   A l'instant $t=0$, les ailerons, à une température de 5°C, sont placés dans le tunnel donc $g(0)=5$.

   (b) Vérifier que la fonction g est définie par $g(t)=40\mathrm{e}^{-1,5t}-35$.
   $$g(0)=5 \iff K\mathrm{e}^{0}-35=5 \iff K=35+5 \iff K=40$$
   Donc $\forall\ t\in[0,+\infty[,\ g(t)=40\mathrm{e}^{-1,5t}-35$.

3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?
   $$\begin{aligned} g(t)=-24 \iff 40\mathrm{e}^{-1,5t}-35=-24 \iff 40\mathrm{e}^{-1,5t}=11 &\iff \mathrm{e}^{-1,5t}=\frac{11}{40}\\ &\iff \ln(\mathrm{e}^{-1,5t})=\ln\left(\frac{11}{40}\right)\\ &\iff -1,5t=\ln\left(\frac{11}{40}\right)\\ &\iff t=-\frac{2}{3}\ln\left(\frac{11}{40}\right)\approx 0,86\ (\approx 52\text{ min}). \end{aligned}$$
   Les ailerons atteignent la température de -24°C au bout de 52 min.
   Le tunnel permet une congélation plus rapide.