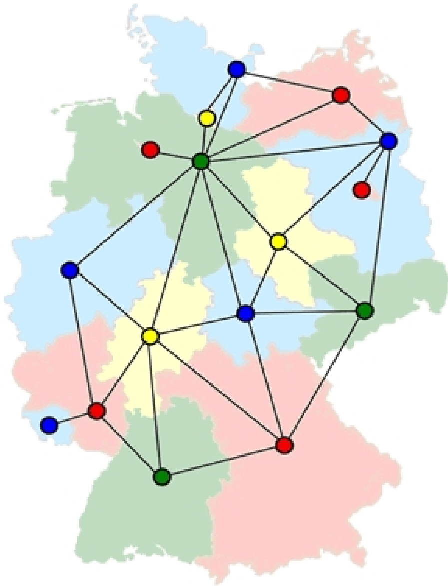


Planifier un examen à l'aide de la théorie des graphes

M. Mohamed Nassiri

Résumé

L'un des théorèmes les plus connus de la théorie des graphes est le *théorème à quatre couleurs*. Il stipule que toute carte dans un plan peut être colorée en utilisant quatre couleurs de telle sorte que les régions partageant une frontière commune (autre qu'un point unique) ne partagent pas la même couleur. Quel est le rapport entre *graphe* et *coloriage de cartes* ?
Dans cette note, nous allons revenir sur la notion de *coloriage d'un graphe* et appliquer cette notion à l'élaboration d'un planning d'examens.

2020

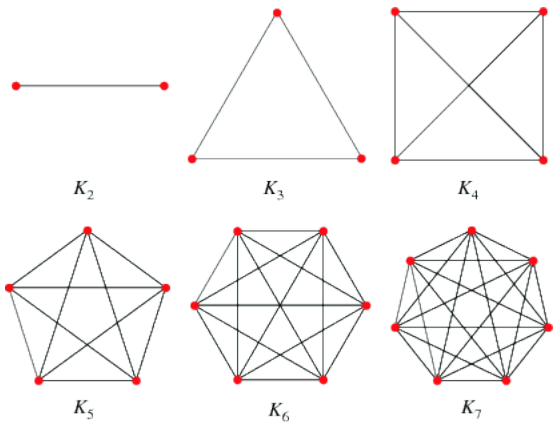
1 Un peu de vocabulaire

Définitions
Un graphe simple G est un couple formé de deux ensembles :
- un ensemble $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et
- un ensemble $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$, partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(X)$ des parties à deux éléments de X, dont les éléments sont appelés arêtes.
On notera $G = (X; A)$.
Lorsque $a = \{x; y\} \in A$, on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y, ou que a joint x et y, ou encore que a passe par x et y. Les sommets x et y sont dits adjacents dans G.
Le degré de x, noté $d(x)$, est le nombre d'arêtes incidentes à x ; c'est–à-dire contenant x.

Exemples :
1. Le graphe d'un tournoi $T = (X; A)$ où :
- X est l'ensemble des participants au tournoi
- A est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.

2. La carte routière de la France $F = (X; A)$ où
- X est l'ensemble des villes de la France.
- $A = \{x; y\}$ il y a au moins une route directe reliant les villes x et y :

3. Le graphe complet d'ordre n, K_n ; où $X = \{1; 2; ...; n\}$ et $A = \mathcal{P}_2(X)$



2 Coloriage des sommets d'un graphe

Définitions
Soit $G = (X; A)$ un graphe non orienté. Un sous-ensemble S de X est stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.
Le cardinal de la plus grande partie stable est le nombre de stabilité de G ; on le note $\alpha(G)$.
La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter tous les sommets de ce graphe d'une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
Une coloration avec k couleurs (ou k-coloration) est donc une partition de l'ensemble des sommets en k parties stables. Le nombre chromatique, noté $\gamma(G)$; du graphe G est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de X en k sous-ensembles stables.

Proposition
Soit $G = (X; A)$ un graphe simple d'ordre n.
On a l'encadrement suivant :
$$\left[\frac{n}{\alpha(G)}\right] \leqslant \gamma(G) \leqslant r + 1$$
où r est le degré maximal des sommets du graphe G.

Démonstration
On renvoie le lecteur à $[SIG12]$. □

Proposition
Soit $G = (X, A)$ un graphe simple d'ordre n, alors :

$$\gamma(G) + \alpha(G) \leqslant n + 1$$

Démonstration
Considérons S, une partie stable de X de cardinal $\alpha(G)$.
Une coloration possible des sommets consiste à colorier les sommets de S d'une même couleur et les $n - \alpha(G)$ autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que :

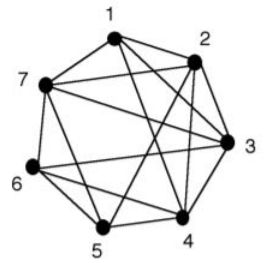
$$\gamma(G) \leqslant 1 + (n - \alpha(G))$$

□

3 Problème d'emploi du temps

> « *Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée miminale ?* »

Solution :
Construisons le graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs :



Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une $k-$coloration de G, avec $k = \gamma(G)$.
G possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1,2,3,4), donc $\gamma(G) \geqslant 4$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{1, 6\}$$
$$S_2 = \{2\}$$
$$S_3 = \{3, 5\}$$
$$S_4 = \{4, 7\}$$

d'où $\gamma(G) \leqslant 4$, et finalement $\gamma(G) = 4$.
Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :
- 1$^{\text{ère}}$ période : épreuves des cours 1 et 6
- 2$^{\text{e}}$ période, épreuve du cours 2
- 3$^{\text{e}}$ période, épreuves des cours 3 et 5
- 4$^{\text{e}}$ période, épreuves des cours 4 et 7.

Références

Illustration de la page de garde : Marc Timme, Frank van Bussel, Denny Fliegner, and Sebastian Stolzenberg, « *Counting Complex Disordered States by Effiecient Pattern Matching : Chromatic Polynomials and Potts Partition Functions* », New Journal of Physics 11 (2009), 023001, February 4th, 2009
[CAM12] : Eglantine Camby, « *Différents problèmes en théorie des graphes*, 2012, ULB.
[SIG12] : Eric Sigward, « *Introduction à la théorie des graphes* », 2012,