Schibboleth I - Corrigé

(Entrainement Epreuve de spécialité Mathématiques)

16/12/2020

Calculatrice autorisée • Durée : 4h

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que **TOUTE trace de recherche***, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* **Pensez-y pour l'algorithmique notamment...**

« Joyeux Hunger Games, et puisse le sort vous être favorable ! »

Effie Trinket, Hunger Games, 2012.

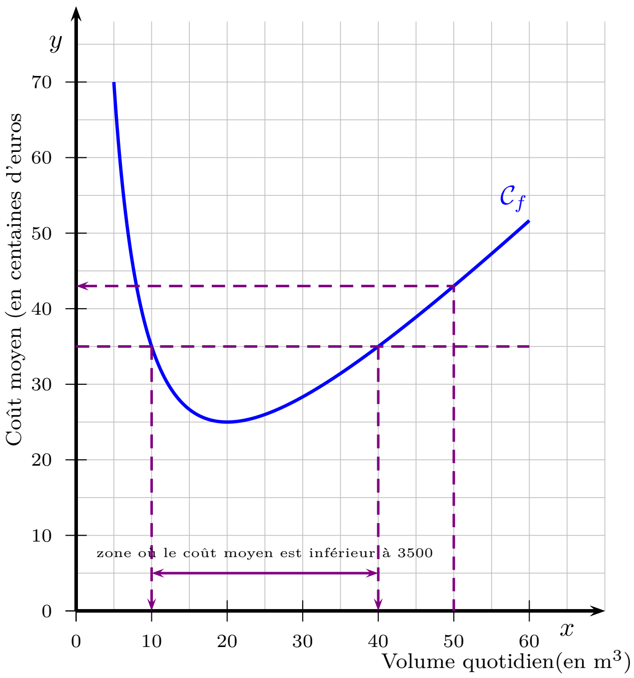
I - Etude d'une fonction

Exercice 1 : D'après Baccalauréat STMG Centres étrangers 2019 **5 points**

Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.
Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre 5m^3 et 60m^3.
Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé parla fonction f définie sur l'intervalle $[5\ ;\ 60]$ par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.
La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère ci-dessous :



PARTIE A

1. Quel est le coût moyen quotidien pour la production de 50m^3 d'engrais ?
   Le coût moyen quotidien pour la production de 50m^3 d'engrais est $f(50)$.
   avec $f(50) = 50 - 15 + \dfrac{400}{50} = 35 + 8 = 43$, soit 4300 €.
   On lit également sur la représentation graphique de f que l'image de 50 est environ 43 avec la même conclusion.
2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3500€ ?
   Pour ce faire, résolvons $f(x) \leqslant 35$.

$$x - 15 + \frac{400}{x} \leqslant 35 \quad ; \quad x - 50 + \frac{400}{x} \leqslant 0 \quad ; \quad \frac{x^2 + 50x + 400}{x} \leqslant 0$$

et enfin

$$x^2 + 50x + 400 \leqslant 0$$

car $x > 0$.
$x^2 - 50x + 400$ est un trinôme du second degré.
Calculons le discriminant. $\Delta = 50^2 - 4 \times 1 \times 400 = 900$.
$\Delta > 0$ le trinôme admet deux racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{50 - \sqrt{900}}{2} = 10$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{50 + \sqrt{900}}{2} = 40$$

Il faut donc résoudre $(x - 10)(x - 40) \leqslant 0$.
On sait que $(x - 10)(x - 40) \geqslant 0$, sauf sur l'intervalle $[10 \ ; \ 40]$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation sur l'intervalle $[5 \ ; \ 60]$ est $[10 \ ; \ 40]$.
L'entreprise, pour avoir des coûts moyens inférieurs Ã 3500 €, doit fabriquer entre 10 et 40 m^3 d'engrais.

PARTIE B

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[5 ; 60]$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[5 ; 60]$.
   Pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$,

$$f'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

<u>Etudions le signe de $x^2 - 400$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 \ ; \ 60]$:</u>
$x^2 - 400 = x^2 - 20^2 = (x + 20)(x - 20)$
Sur $[5 \ ; \ 60]$ $\quad x + 20 > 0$
Sur $\mathbb{R}$, $x - 20 > 0 \iff x > 20$, par conséquent sur $[5 \ ; \ 20[$ $x - 20 < 0$ et sur $]20 \ ; \ 60]$ $x + 20 > 0$.
Il en résulte aussi que sur $[5 \ ; \ 20[$ $x^2 - 400 < 0$ et sur $]20 \ ; \ 60]$ $x^2 - 400 > 0$.

Sur $[5 \ ; \ 20[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Sur $]20 \ ; \ 60]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

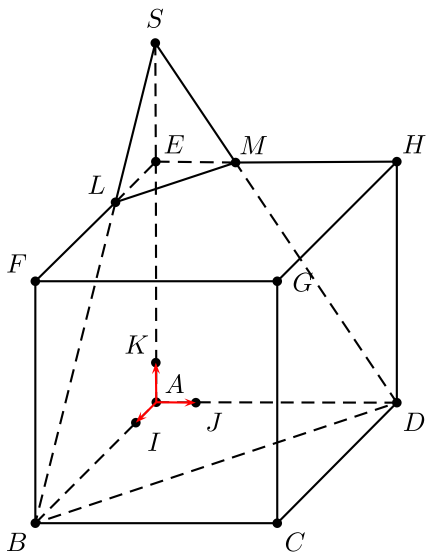
x	5		20		60
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$g(5)$	$\searrow$	2500	$\nearrow$	$g(60)$

2. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?
Le coût moyen quotidien de production est minimal pour un volume d'engrais fabriqué de 20m^3.
Ce coût moyen minimal est égal à 2500 €.

II - Repérage dans l'espace

Exercice 2 : D'après Baccalauréat S Antilles-Guyane 2018 **5 points**

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

— L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
— M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
— S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
Les droites (LM) et (BD) sont coplanaires (dans le plan (BDS)) et contenues respectivement dans les plans (ABD) et (EFH) qui sont parallèles, donc elles sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.
$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = 6\overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK}$$
donc les coordonnées de L sont $L(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.
3. Sachant que $S(0;0;9)$, calculer les coordonnées du point M.
Appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ADS avec $(EM)//(AD)$ et on trouve $M(0\ ;\ 2\ ;\ 6)$.
4. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :
$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$
L'aire du triangle ELM est $\mathcal{A}(ELM) = \dfrac{EL \times EM}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$.
La hauteur SE vaut $SE = AS - AE = 9 - 6 = 3$.
Le volume du tétraèdre $SELM$ est alors : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2\ \text{m}^3$.

III - Probababilités

Exercice 3 : D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie 2020 **5 points**

Les probabilités seront arrondies si nécessaire au millième.

Partie A

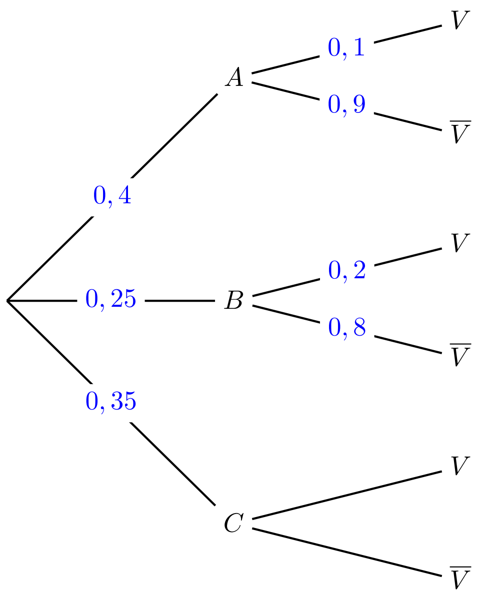
Une antenne relais chargée d'acheminer des communications est exploitée par trois opérateurs : l'opérateur A, l'opérateur B et l'opérateur C.
Par ailleurs, cette antenne utilise deux types de canal : le canal vocal (pour les communications téléphoniques) et le canal internet (pour les communications par texto ou par mail).
On dispose des données suivantes :

- 40 % des communications passent par l'opérateur A ;
  25 % des communications passent par l'opérateur B ;
- 10 % des communications passant par l'opérateur A utilisent le canal vocal ;
- 20 % des communications passant par l'opérateur B utilisent le canal vocal ;
- 20 % de l'ensemble des communications utilisent le canal vocal.

On choisit une communication au hasard et on considère les évènements :

- A : « la communication passe par l'opérateur A » ;
  B : « la communication passe par l'opérateur B » ;
- C : « la communication passe par l'opérateur C » ;
- V : « la communication utilise le canal vocal ».

1. A l'aide des valeurs de l'énoncé, compléter les pointillés indiqués sur les branches de l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que la communication passe par l'opérateur A et utilise le canal vocal.
   La probabilité que la communication passe par l'opérateur A et utilise le canal vocal est

$$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$$

3. La communication passe par l'opérateur C. Quelle est la probabilité qu'elle soit acheminée par le canal vocal ?
   La communication passe par l'opérateur C.
   La probabilité qu'elle soit acheminée par le canal vocal est $P_C(V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(C)}$.
   On calcule $P(C \cap V)$ en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V) = P(A\cap V) + P(B\cap V) + P(C\cap V) &\iff P(V) = P(A\cap V) + P(B) \times P_B(V) + P(C\cap V) \\ &\iff 0,2 = 0,04 + 0,25 \times 0,2 + P(C\cap V) \\ &\iff P(C\cap V) = 0,11 \end{aligned}$$

   Donc $P_C(V) = \dfrac{P(C\cap V)}{P(C)} = \dfrac{0,11}{0,35} \approx 0,314$.

Partie B

Cette antenne relais couvre une zone géographique bien définie appelée cellule. Dans cette cellule, les ressources radio sont limitées à 350 appels simultanés. Cela signifie qu'au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée.
Dans cette cellule, 1600 personnes possèdent chacune un téléphone mobile.
A un instant donné, on choisit au hasard une personne parmi les 1600 personnes de la cellule. On admet que la probabilité que cette personne passe un appel téléphonique est égale à $0,2$. On admet en outre que les 1600 personnes de la cellule agissent indépendamment les unes des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? On précisera ses paramètres.
   Une expérience aléatoire admet deux issues : la personne passe un appel téléphonique avec une probabilité de $p = 0,2$, ou non.
   On réalise cette expérience dans les mêmes conditions 1600 fois.
   Donc la variable aléatoire X égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule suit la loi binomiale de paramètres $n = 1600$ et $p = 0,2$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.
   L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 1600 \times 0,2 = 320$.
   Il y a donc en moyenne 320 personnes qui téléphonent à un instant donné.
3. Calculer la probabilité que l'antenne ne soit pas saturée.
   Au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée ; donc la probabilité que l'antenne ne soit pas saturée est $P(X \leqslant 350) \approx 0,971$.

IV - Etude d'une suite

Exercice 4 : D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie 2019 **5 points**

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,11111111
4	2	0,01369863
5	3	0,0017094
6	4	0,00021363
7	5	2,6703E−05
8	6	3,3379E−06
9	7	4,1723E−07
10	8	5,2154E−08
11	9	6,5193E−09
12	10	8,1491E−10

1. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
   La suite (u_n) semble décroissante.
2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
   La suite (u_n) semble converger vers 0.
3. Ecrire un algorithme en Python calculant u_{30}.

```
u=1
for i in range(1,30):
    u=u/(u+8)
print(u)
```

Partie B : Etude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.
   - Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0$; donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, c'est-à-dire que $u_n > 0$.
     $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$
     Or $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ donc $\dfrac{u_n}{u_n + 8} > 0$; on a donc démontré que $u_{n+1} > 0$.
   - On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.
2. Etudier les variations de la suite (u_n).
   Pour tout n :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n+8} - u_n &= u_n\left(\frac{1}{u_n+8} - 1\right) \\ &= u_n\left(\frac{1-u_n-8}{u_n+8}\right) \\ &= \frac{u_n(-u_n-7)}{u_n+8} \end{aligned}$$
   Pour tout n, on a $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ et $-u_n - 7 < 0$.
   On en déduit que $\dfrac{u_n(-u_n-7)}{u_n+8} < 0$ et donc que $u_{n+1} - u_n < 0$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
   Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
   - $v_{n+1} = 1+\dfrac{7}{u_{n+1}} = 1+\dfrac{7}{\dfrac{u_n}{u_n+8}} = 1+\dfrac{7\,(u_n+8)}{u_n} = 1+\dfrac{7u_n}{u_n}+\dfrac{56}{u_n} = 1+7+\dfrac{56}{\dfrac{7}{v_n-1}} = 8+8\,(v_n-1)$
     $= 8+8v_n-8 = 8v_n$
   - $v_0 = 1+\dfrac{7}{u_0} = 1+\dfrac{7}{1} = 8$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 8$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1}-1}.$$

   On en déduit que $v_n - 1 = \dfrac{7}{u_n}$ donc que $u_n = \dfrac{7}{v_n-1}$.
   On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.
   Or $u_n = \dfrac{7}{v_n-1}$, donc, pour tout n, on a $u_n = \dfrac{7}{8^{n+1}-1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   $8 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{8^{n+1}-1} = 0$ ce qui veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.