Chapitre: Nombres complexes d'un point de vue algébrique

Promotion Mirzakhani

2020/2021

Objectifs :	**Notions :**	**Prérequis :**
1. Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. **2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation linéaire az=b avec a et b dans $\mathbb{C}$. **3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation simple faisant intervenir z et z barre **4.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels. **5.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 3 à coefficients réels dont une solution est connue. **6.** Factoriser dans $\mathbb{C}$ un polynôme dont une racine est connue.	- z et conjugué de z ($\overline{z}$) - $\mathbb{C}$ - Equation simple/ linéaire/ polynomiale (de degré différent) - Polynôme - Expression algébrique - Imaginaire pur	➢ Double distributivité ➢ Identités remarquables ➢ Equation simple et linéaire réelle ➢ Polynômes et racines ➢ Factorisation

Source : *lelivrescolaire.fr*

PLAN :

I. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

A. Définitions et propriétés

B. Opérations sur les nombres complexes

II. Nombres complexes conjugués

A. Définitions et propriétés algébriques

B. Inverse et quotient et opérations des conjugués

III. Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2.

A. Résolutions des équations du second degré à coefficients réels

B. Équations polynomiales à coefficient réels

Source : lelivrescolaire.fr / maths-et-tiques / j'ai compris math

Introduction

Les nombres complexes permettent de faire un pont entre trois domaines mathématiques : la géométrie, la trigonométrie et l'algèbre. Par exemple, ils permettent d'introduire de nouvelles solutions pour résoudre des équations du 3ème et du 4ème degré. Ce chapitre permettra également de revoir nombre de notions, en compléter d'autres et même remarquer que certaines propriétés sont perdues dans cet ensemble.

I) L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

A) Définitions et propriétés

Définition 1)

- L'unique façon de noter les différents nombres complexes est : $z = a + i.b$ (appelé la forme algébrique), où i ~~détecte~~ caractérise la partie imaginaire et b est la partie imaginaire elle-même. a et b sont des nombres réels.
- Le nombre nouveau noté i, est tel que $i^2 = -1$

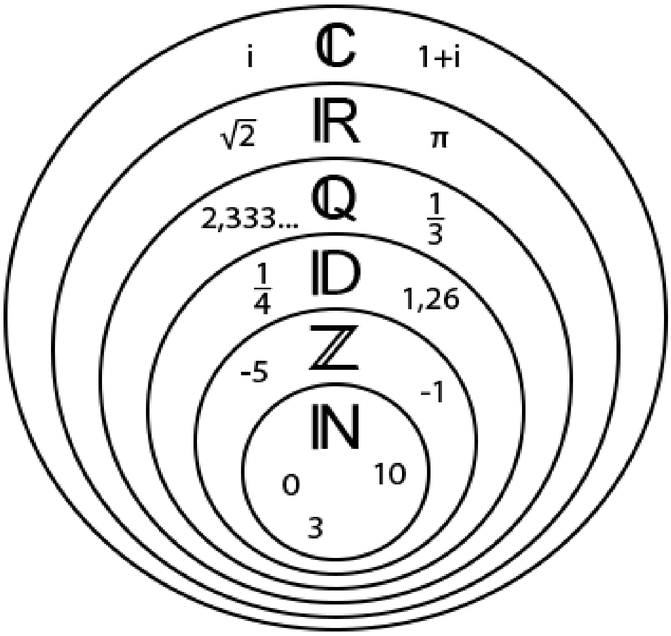


Illustration de l'ensemble des ensembles.

Source : *bacomathiqu.es*

Exemple :

3+2i est un nombre complexe où a = 3 et b = 2

Les nombres -8,75 ; 3π et ⅓ sont des nombres complexes.

Notation :

Le nombre complexe nul, s'écrit : 0 = 0 + 0i

Définition 2)

L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z=a+ib$ où a et b sont deux réels est appelée **forme algébrique de *z***.
Le nombre a est appelé **partie réelle de *z*** et on note $a = Re(z)$.
Le nombre b est appelé **partie imaginaire de *z*** et on note $b = Im(z)$.

Exemple : En considérant, $z = 4+3i$, on a $Re(z) = 4$ et $Im(z) = 3$.

Remarque :

Si $b = 0$, alors $z = a$ est un réel.
Si $a = 0$, alors $z = ib$ est un **imaginaire pur**.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Propriété 1 :

$z = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$
$z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$

Autrement dit, un nombre complexe est nul si, et seulement si, ces parties réelles ET imaginaires sont strictement nulles.
Ainsi, deux nombres complexes sont strictement égaux si, et seulement si, leurs parties réelles et imaginaires sont égales deux à deux.

B) Opérations sur les nombres complexes

Propriété 2 :

On a défini dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
Quels que soient les réels k, a, b, a' et b', on a donc :

1. $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
2. $(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$
3. $k(a + ib) = (ka) + i(kb)$
4. $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Remarque :
Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout réel k, on a :

$$Re(z+z') = Re(z) + Re(z') \;;$$
$$Im(z+z') = Im(z) + Im(z') \;;$$
$$Re(kz) = kRe(z) \;;$$
$$Im(kz) = kIm(z).$$

On parle de linéarité des parties réelles et imaginaires.

Exemple :

- $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$
- $3 + 2i - (3i-2) = 3 + 2i - 3i + 2 = 5 - i$
- $(3 - 2i)(2 + 3i) = 3 \times 2 + 3 \times 3i - 2i \times 2 - 2 \times 3i^2 = 12 + 5i$

Propriété 3:

Pour tous nombres complexes z, z′ et z″, on a :

- **Commutativité :** $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$
- **Associativité :** $(z+z') + z'' = z + (z'+z'') = z + z' + z''$ et $(zz') \times z'' = z \times (z'z'') = zz'z''$
- **Éléments neutres :** $z + 0 = z$, $z + (-z) = 0$ et $z \times 1 = z$
- **Règles de calculs :** $z(z'+z'') = zz' + zz''$ et $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

Remarque : La commutativité de $zz' = z'z$ permet de définir z^n avec $n \in \mathbb{N}$

Corollaire :

Pour tous réels a et b, on a :

- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$
- $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$
- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Remarque : De ce fait :

- $\mathrm{Re}(z^2) \neq (\mathrm{Re}(z))^2$
- $\mathrm{Im}(z^2) \neq (\mathrm{Im}(z))^2$

Exemple :

Soit $z = 3+2i$:

$$\mathrm{Re}(z) = 3, \text{ alors } (\mathrm{Re}(z))^2 = 9$$

En revanche :

$$z^2 = (3 + 2i)^2 = 3^2 - 2^2 + 12i = 5 + 12i, \text{ alors } \mathrm{Re}(z^2) = 5$$

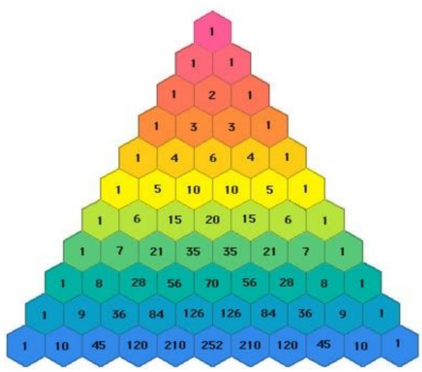
Binôme de Newton :

Pour tous nombres complexes *u* et *v* et pour tout entier naturel *n*, on a :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Méthode :

Pour trouver facilement les coefficients binomiaux, on peut utiliser le triangle de Pascal base sur la propriété suivante :



Exercice :
Calculer les binômes de Newton suivants :

(2+i)^3=

(1−i)^5=

Données: Pour tout entier k compris entre 0 et n, le coefficient $\binom{n}{k}$ a été défini dans le chapitre « Combinatoire et dénombrement »

Solutions :

$$(2+i)^3 = \binom{3}{0} 2^3 i^0 + \binom{3}{1} 2^2 i^1 + \binom{3}{2} 2^1 i^2 + \binom{3}{3} 2^0 i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i;$$

$$(1-i)^5 = \binom{5}{0} 1^5 i^0 - \binom{5}{1} 1^4 i^1 + \binom{5}{2} 1^3 i^2 - \binom{5}{3} 1^2 i^3 + \binom{5}{4} 1^1 i^4 - \binom{5}{5} 1^0 i^5$$
$$= 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i.$$

II) Nombres complexes conjugué

A) Définitions et propriétés algébriques

Définition 3 :
Le **conjugué** d'un nombre complexe *z* est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$\overline{z}$ = Re(z) - i × Im(z)

Remarque :
Si z est un nombre complexe, et si a et b sont les réels tels que z = a + ib, alors $\overline{z}$ = a - ib

Exemple :
- $\overline{i} = -i$
- Pour tout (a ;b) ∈ ℝ*, $\overline{a} = a$ et $\overline{ib} = -ib$.
- Si z = 3 + 2i, alors $\overline{z}$ = 3 − 2i.

Propriété 4 :

Pour tout nombre complexe *z*, on a :

1. *z = z ;*
2. *z + z = 2Re(z) ;*
3. *z − z = 2i×Im(z) ;*
4. *z* ∈ ℝ ⇔ *z = z ;*
5. *r* ∈ *i*ℝ ⇔ *z = −z ;*
6. *z × z = (Re(z))²+ (Im(z))².*

Exercice : Écrire sous forme algébrique le conjugué des nombres suivant :

1. z = -2
2. z = -3i/4
3. z = i - 2

B) Inverse, quotient et opérations des conjugués

Définition 4 :

Soit z = a + ib un nombre complexe non nul.

L'inverse de z est le nombre complexe z' tel que zz' = 1 et on le note 1/z.

On a alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{\tilde{a}-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}.$$

Exemple :

$$\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$$

$$\frac{1}{1+2\mathrm{i}} = \frac{1-2\mathrm{i}}{1^2+2^2} = \frac{1-2\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$$

Définition 3 :

soit z = a + ib et z'= a' + ib' , deux nombres complexes avec $\overline{z} \neq 0$.

Le quotient de z par $\overline{z}$ est le nombre complexe noté z / $\overline{z}$ = z x i/ $\overline{z}$.

on a :

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)\,(a'-ib')}{a'^2+b'^2} = \frac{\mathrm{z}\times\mathrm{z}'}{a'^2+b'^2}.$$

Exemple :

$$\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-3} = \frac{1+\mathrm{i}}{-3+2\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(-3-2\mathrm{i})}{(-3)^2+2^2} = \frac{-3+2+\mathrm{i}(-2-3)}{13} = \frac{-1-5\mathrm{i}}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\mathrm{i}$$

Propriétés 5 :

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{(zz')} = \overline{z} \times \overline{z'}$

si z ≠ 0 alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

si z' ≠ 0 alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;

$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ (avec $z \neq 0$ et si $n < 0$).

Exemple :

$$z_1 = \overline{(1-2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = \overline{(1-2\mathrm{i})} \times \overline{(2+3\mathrm{i})} = (1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2+6+\mathrm{i}(-3+4) = 8+\mathrm{i}$$
$$z_2 = \overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{i}}}{\overline{1+\mathrm{i}}} = \frac{-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2} = \frac{-\mathrm{i}+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$
$$z_3 = \overline{(\mathrm{i}^3)} = \left(\overline{\mathrm{i}}\right)^3 = (-\mathrm{i})^3 = \mathrm{i}$$

III. Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2.

A) Résolutions des équations du second degré à coefficients réels

Dans cette partie, on cherchera à résoudre des équations du type az² + bz + c = 0 Où a, b et c trois nombres réels ≠ 0 et z un nombre complexe. En réintroduisant et en complétant des notions de 1ère

Rappel : on appelle discriminant du trinôme az² + bz + c = 0 le nombre réel, noté Δ, où Δ = b² - 4ac

Théorème (+ rappel) :
Dans une équation (E) du type az² + bz + c = 0
On a,

- Pour Δ = 0, la solution réelle de (E) :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- pour Δ > 0, les solutions réelles de (E) :

$$x_1 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}$$

- Pour un Δ < 0, (E) admet 2 solutions ©omplexes:

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Application : Résoudre les équations suivantes

- $4z^2 - 6z + 2 = 0$
- $z + 2/z = -2$

Définition :

Soit n un entier naturel et soient a_0, a_1, ..., a_n des nombres réels avec $a_n \neq 0$. On appelle polynôme de degré n la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

L'équation de P(z) = 0 et appelée équation polynomiale de degré n

Remarques :

Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ces coefficients sont nuls.
Lorsque $a_n = 1$ on dit que P(z) est unitaire.

Notation :

On note deg(P) le degré d'un polynôme P.

Propriétés :

Soit z et a deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n non nul,

$z^n - a^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k$

Remarque :

La propriété donne que pour tout entier naturel n non nul, $z_n - a_n$ se factorise par (z - a)
Une telle opération est appelée télescopage.

Définition :

Soit z un nombre complexe.
Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1.
Si P(z) = 0, alors P se factorise par (z - a)
Autrement dit, si P(z) = 0, alors il existe un polynôme Q avec deg(Q)= deg(P) - 1 tel que pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$: P(z) = (z - a) Q(z)

~~Démonstration laissée au lecteur.~~

Remarques (importante) :

- si P(k) = 0, on nomme k la racine de ce polynôme.
- un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Exercice :

Soit P le polynôme défini sur ℂ par $P(z) = 2z^3 + 3z - 5$.

1. Montrer que 1 est une racine de P.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre dans ℂ l'équation $P(z) = 0$.

Aide à l'exo

1. On vérifie que P(1)=0
2. On développe le produit et on identifie terme à terme les coefficients des deux polynômes pour obtenir un système de quatre équations à trois inconnues a, b et c que l'on résout.
3. On utilise la propriété : « Un produit est nul si, et seulement si, au moins l'un de ses facteurs est nul. » et on résout l'équation du second degré en calculant son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriétés (admises) :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels.

- la somme de toutes ses racines est égale à $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$
- le produit de toutes ses racines est égal à $(-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$

~~Corollaire :~~

~~Bien qu'étant situé dans l'ensemble C, il est toujours possible de résoudre une équation bicarrée de forme~~ $z^4 + 3z^2 - 4$

Quelques vidéos intéressantes à aller voir :

- J'ai compris math : NOMBRES COMPLEXES • Définition • Forme Algébrique d'un nombre complexe • Cours Terminale S
- Yvan Monka : Résoudre une équation de degré 3 avec une racine connue - Terminale - Maths expertes
- J'ai compris math : Factoriser un polynôme par (z-a) avec la racine de P - Cours Terminale maths expertes
- J'ai compris math : Résoudre une équation bicarrée à l'aide des équations du second degré - Première S