

# Schibboleth I

(Entraînement Epreuve de spécialité Mathématiques)

16/12/2020

Calculatrice autorisée • Durée : 4h

## Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que **TOUTE** trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Pensez-y pour l'algorithmique notamment...

« Joyeux Hunger Games, et puisse le sort vous être favorable ! »

Effie Trinket, Hunger Games, 2012.

## I - Etude d'une fonction

Exercice 1 : D'après Baccalauréat STMG Centres étrangers 2019

5 points

Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.

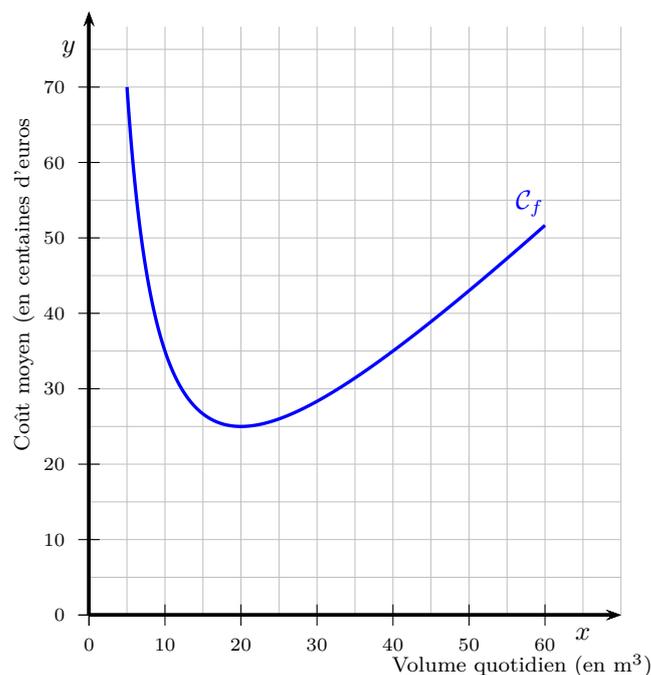
Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre  $5\text{m}^3$  et  $60\text{m}^3$ .

Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[5 ; 60]$  par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où  $x$  est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en  $\text{m}^3$ .

La représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est donnée dans le repère ci-dessous :



## PARTIE A

1. Quel est le coût moyen quotidien pour la production de  $50\text{m}^3$  d'engrais ?
2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à  $3500\text{€}$  ?

## PARTIE B

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[5; 60]$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Etudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[5; 60]$ .
2. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

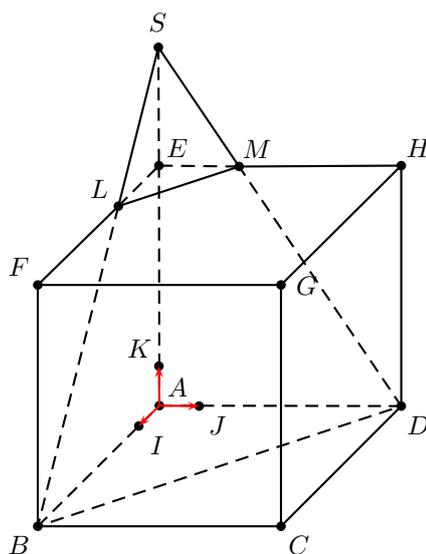
---

## II - Repérage dans l'espace

### Exercice 2 : D'après Baccalauréat S Antilles-Guyane 2018

5 points

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube  $ABCDEFGH$  et par le tétraèdre  $SELM$  ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$  tel que :  $I \in [AB]$ ,  $J \in [AD]$ ,  $K \in [AE]$  et  $AI = AJ = AK = 1$ , l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points  $L$ ,  $M$  et  $S$  sont définis de la façon suivante :

- $L$  est le point tel que  $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$  ;
- $M$  est le point d'intersection du plan  $(BDL)$  et de la droite  $(EH)$  ;
- $S$  est le point d'intersection des droites  $(BL)$  et  $(AK)$ .

1. Démontrer, sans calcul, que les droites  $(LM)$  et  $(BD)$  sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point  $L$  sont  $(2; 0; 6)$ .
3. Sachant que  $S(0; 0; 9)$ , calculer les coordonnées du point  $M$ .
4. Calculer le volume du tétraèdre  $SELM$ . On rappelle que le volume  $V$  d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

### III - Probabilités

#### Exercice 3 : D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie 2020

5 points

Les probabilités seront arrondies si nécessaire au millième.

#### Partie A

Une antenne relais chargée d'acheminer des communications est exploitée par trois opérateurs : l'opérateur A, l'opérateur B et l'opérateur C.

Par ailleurs, cette antenne utilise deux types de canal : le canal vocal (pour les communications téléphoniques) et le canal internet (pour les communications par texto ou par mail).

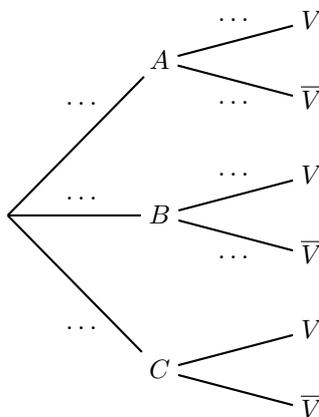
On dispose des données suivantes :

- 40 % des communications passent par l'opérateur A ;  
25 % des communications passent par l'opérateur B ;
- 10 % des communications passant par l'opérateur A utilisent le canal vocal ;
- 20 % des communications passant par l'opérateur B utilisent le canal vocal ;
- 20 % de l'ensemble des communications utilisent le canal vocal.

On choisit une communication au hasard et on considère les événements :

- $A$  : « la communication passe par l'opérateur A » ;
- $B$  : « la communication passe par l'opérateur B » ;
- $C$  : « la communication passe par l'opérateur C » ;
- $V$  : « la communication utilise le canal vocal ».

1. A l'aide des valeurs de l'énoncé, compléter les pointillés indiqués sur les branches de l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que la communication passe par l'opérateur A et utilise le canal vocal.
3. La communication passe par l'opérateur C. Quelle est la probabilité qu'elle soit acheminée par le canal vocal ?

#### Partie B

Cette antenne relais couvre une zone géographique bien définie appelée cellule. Dans cette cellule, les ressources radio sont limitées à 350 appels simultanés. Cela signifie qu'au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée.

Dans cette cellule, 1600 personnes possèdent chacune un téléphone mobile.

A un instant donné, on choisit au hasard une personne parmi les 1600 personnes de la cellule. On admet que la probabilité que cette personne passe un appel téléphonique est égale à 0,2. On admet en outre que les 1600 personnes de la cellule agissent indépendamment les unes des autres.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ? On précisera ses paramètres.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $X$  et interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que l'antenne ne soit pas saturée.

## IV - Etude d'une suite

### Exercice 4 : D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie 2019

5 points

On considère la suite  $(u_n)$  à valeurs réelles définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

#### Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite  $(u_n)$  ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	1
3	1	0,11111111
4	2	0,01369863
5	3	0,0017094
6	4	0,00021363
7	5	2,6703E-05
8	6	3,3379E-06
9	7	4,1723E-07
10	8	5,2154E-08
11	9	6,5193E-09
12	10	8,1491E-10

1. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite  $(u_n)$  ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite  $(u_n)$  ?
3. Ecrire un algorithme en Python calculant  $u_{30}$ .

#### Partie B : Etude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
2. Etudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Justifier.

#### Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$