Chapitre : Limites et continuité de fonctions
Promotion Noether
2020/2021

Introduction

1. Limites des fonctions
    a. Limites en $+\infty$ et $-\infty$
    b. Limite en un point
    c. Application aux limites de référence
    d. Interprétation graphiques des limites

2. Continuité
    a. Définition
    b. Propriétés
    c. Théorèmes des valeurs intermédiaires et son corollaire
    d. Fonction réciproque et propriété

Capacités attendues :

1. Déterminer la limite d'une fonction en un réel a, en $+\infty$ ou en $-\infty$ à l'aide des théorèmes d'opérations sur les limites.
2. Déterminer la limite d'une fonction en utilisant les limites usuelles des fonctions de référence.
3. Déterminer une limite par comparaison.
4. Donner une équation des éventuelles asymptotes parallèles à un axe de coordonnées à la courbe représentative d'une fonction.

Introduction:

On observe le comportement qu'une fonction a, lorsque les valeurs de x tendent en allant vers l'infini ou à des valeurs interdites.

On fait donc l'introduction d'une fonction :

$$f(x) = \frac{x}{(x-5)^2}$$

Si on met comme image 3 et 10 on n'a donc :

$$f(3) = \frac{3}{(3-5)^2} = 0,75$$

$$f(10) = \frac{10}{(10-5)^2} = 0,4$$

Maintenant prenons 5 comme image, ce qui nous donne :

$$f(5) = \frac{5}{(5-5)^2}$$

⇒ le dénominateur est nul, cette fraction est donc interdite en mathématique. On ne peut donc pas calculer l'image de 5 par la fonction f

On va donc prendre un image proche de 5 :

$$f(4,9) = \frac{4,9}{(4,9-5)^2} = 490$$

$$f(4,99) = \frac{4,99}{(4,99-5)^2} = 49900$$

$$f(4,999) = \frac{4,999}{(4,999-5)^2} = 4999000$$

$$f(4,9991) = \frac{4,9991}{(4,9991-5)^2} = 6171728,4$$

Les valeurs de f vont continuer à augmenter si elle se rapproche de 5 on dit que x tend vers 5.
Donc lorsque x tend vers 5 alors f(x) tend vers $+\infty$ et ont peut atteindre des valeurs de plus en plus grande.

1. Limite des fonction

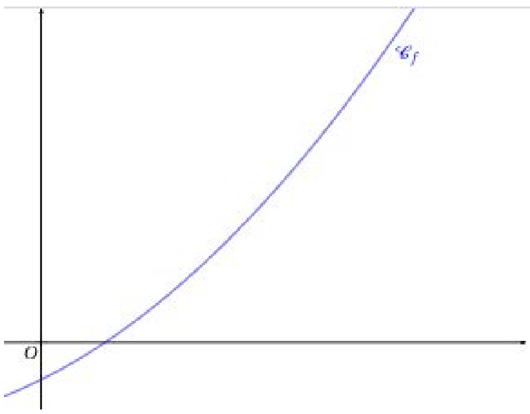
a) Limite ~~vers -∞~~ quand x tend vers +∞ et -∞

Imaginons une fonction f définie sur l'intervalle [a;+∞], on dit alors que f(x) tend vers +∞ lorsque x est suffisamment grand alors f(x) aussi,il sera aussi grand que l'on souhaite on l'écrit alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Exemple:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

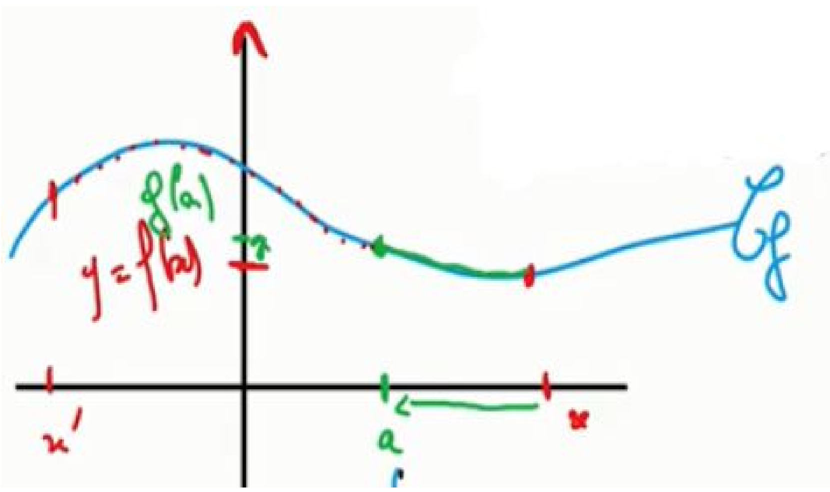


Remarque : La limite en -∞ a la même définition que en +∞.

Source : math-cours.fr, maths-et-tiques (YouTube)

b) Limite d'une fonction en un point

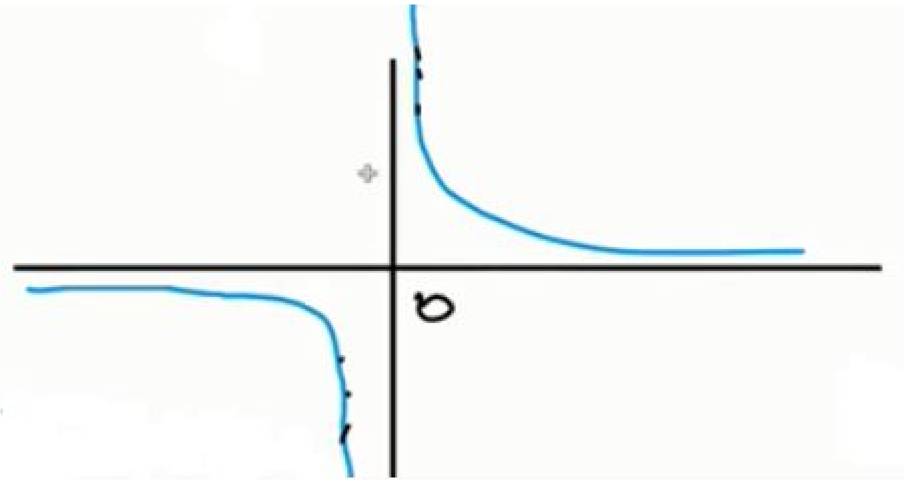
Cas numéro 1:



Sur ce graphique, on fait tendre x vers a et on va donc trouver un certains point sur la courbe (le point vert) d'ordonné f(a). Donc f(x) tend vers f(a), sur l'axe des ordonnées, ~~f(x) va vers f(a)~~.

Cas numéro 2:

Etudions la limite quand x tend vers 0 de la fonction représentée ci-dessous.
"Le morceau de la fonction de droite" va tendre vers +∞ lorsque x tend vers 0, car 0 est un point qui n'appartient pas au domaine de définition.
Pour "le morceau de gauche", la fonction tend vers -∞



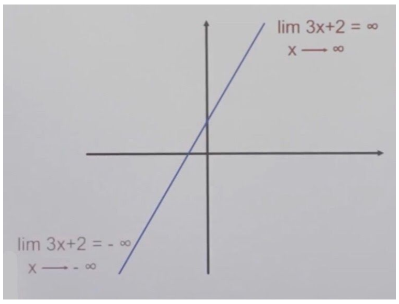
Donc, pour faire clair, la limite d'une fonction est la valeur pour laquelle tend f(x) quand x tend vers a~~, et f(x) tend vers f(a) quand x tend vers a~~.

Source : www.lesmathsentongs.com

c) Application aux limites de références

-Premières limites de références

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*



Nous prenons une ~~droite~~ fonction affine par exemple définie par : f(x)= 3x+2
Que se passe-t-il en +∞ et -∞ ?
- on note que 3 son coefficient directeur est positif donc la droite est croissante.
- si l'on cherche la limite en $+\infty$ on se demande le fonctionnement de la courbe quand on se déplace vers la droite on voit qu'on n'est vers le haut donc:
la limite quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} 3x + 2 = +\infty$$

- Pour la limite en $-\infty$ on se demande quel est la hauteur de la courbe quand on va sur la gauche et on voit qu'on n'est bas donc la limite quand x tend vers $-\infty$ est $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} 3x + 2 = -\infty$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

Si l'on cherche~~r~~ la limite quand x tend vers $+\infty$, c'est faire un test avec un nombre grand par exemple 100 (c'est pas très grand…) donc : f(100)=3x100+2=302 , 302 qui est un nombre grand et positif donc la limite~~s~~ quand x tend vers +∞ vaut également +∞:

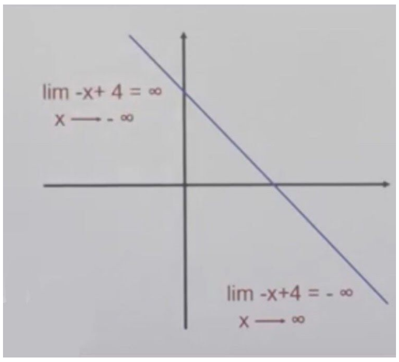
$$\lim_{x \to +\infty} 3x+2 = +\infty$$

Si l'on cherche la limite quand x tend vers $-\infty$, c'est faire un test avec un grand nombre négatif par exemple -100 donc: f(-100)=3x-100+2 = -302, -302 qui est un nombre grand négatif donc la limites quand x tend vers $-\infty$ vaut également $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} 3x+2 = -\infty$$

-Deuxième limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*



La pente est négatif donc la droite est décroissante;
En +∞, on est bas donc la limite vaut -∞:

$$\lim_{x \to +\infty} -x+4 = -\infty$$

En -∞ on est haut donc la limite vaut +∞:

$$\lim_{x \to -\infty} -x+4 = +\infty$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

En +∞ quand on utilise la méthode par le calcul, on prend un nombre grand positif par exemple 100 donc f(100)= -100+4=-104.
On trouve un résultat assez grand mais négatif donc la limite est -∞:

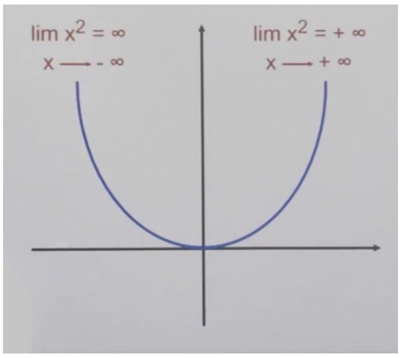
$$\lim_{x \to +\infty} -x+4 = -\infty$$

Si on cherche la limite en -∞, on prend un grand nombre négatif, f(-100)=-(-100)+4=104
Cette fois-ci, on obtient un grand résultat positif, donc la limite est +∞:

$$\lim_{x \to -\infty} -x+4 = +\infty$$

-Troisièmes limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*



La fonction ~~x²~~ carré, ça courbe est une parabole.
En +∞, on est haut donc la limite vaut +∞:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

En -∞ on est haut donc la limite vaut +∞:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

Pour +∞, on prend un grand nombre positif; f(100)=100^2=10 000
On obtient un grand nombre positif donc la limite en +∞ vaut +∞:

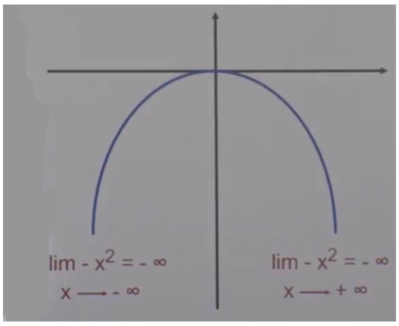
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Pour -∞, on prend un grand nombre négatif; f(-100)=-100^2=10 000
On obtient un grand nombre positif donc la limite en -∞ vaut +∞:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

-Quatrième limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*



La fonction f définie par $f(x) = x^2$, la courbe est une parabole.
En +∞ on est bas donc la limite vaut +∞:

$$\lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$$

En -∞ on est bas donc la limite vaut +∞:

$$\lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

Pour +∞, on prend un grand nombre positif; f(100)=-100^2=-10 000
On obtient un grand nombre négatif donc la limite en +∞ vaut -∞ :

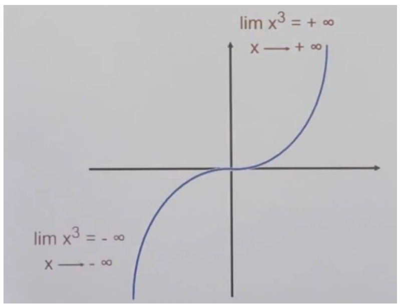
$$\lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$$

Pour -∞, on prend un grand nombre négatif; f(-100)=-(-100^2=-10 000
On obtient un grand nombre négatif donc la limite en -∞ vaut-∞ :

$$\lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$$

-Cinquième limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*



La fonction cube :
Quand on va loin à gauche, on est *haut* donc la limite vaut +∞:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Quand on va loin à droite, on est *bas* donc la limite vaut -∞:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

Pour +∞, on prend un grand nombre positif; f(100)=100³=1 000 000
On obtient un grand nombre positif donc la limite en +∞ vaut +∞ :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Pour -∞, on prend un grand nombre négatif; f(-100)=-(-100³=-1 000 000
On obtient un grand nombre négatif donc la limite en -∞ vaut-∞ :

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

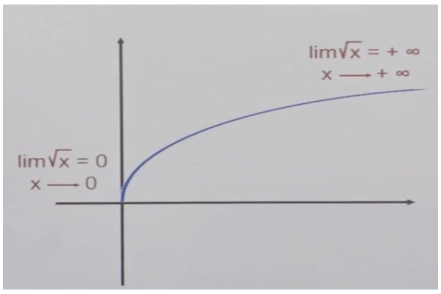
-Sixième limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*

La fonction ~~√x~~ racine carrée qui n'est pas définie sur ~~-∞ et +∞~~]-∞;0[mais sur ~~0 et +∞~~ [0,+∞[, nous cherchons donc ces limites en +∞ et 0.
En +∞, la fonction *monte* mais doucement donc on peut admettre qu'elle tend vers +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

En 0, la fonction a une hauteur qui vaut 0 donc la limite quand x tend vers 0 est 0:



$$\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

En +∞, on teste avec un grand nombre donc f(100)=√100=10, les nombres obtenue seront de plus en plus grand et donc la limite en +∞ sera bien +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

En 0, on n'a donc f(0)=√0=0 , la limite quand x tend vers 0 est donc 0:

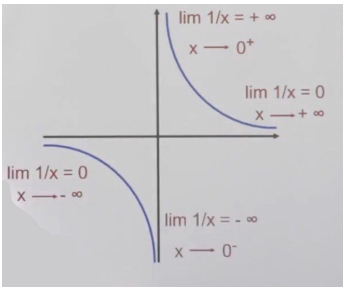
$$\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$$

- Septième limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*

La fonction ~~1/x~~ inverse est définie sur ~~+∞, -∞ et 0~~]-∞;0[U]0;+∞[.
On voit que quand x tend vers +∞ la courbe se rapproche de plus en plus de 0 et se limite vaut donc 0:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$



De même, quand x tend vers -∞, la courbe se rapproche de plus en plus de 0 et sa limite vaut 0:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Quand x tend vers ∞ , il y a donc un comportement possible :

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

Pour +∞, on prend un grand nombre positif donc f(100)= 1/100=0,01
On n'a donc une limite qui tend vers 0:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pour -∞, on prend un grand nombre négatif donc f(-100)= 1/-100=-0,01
On n'a donc une limite qui tend vers 0:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pour les limites quand x tend vers 0, il y a aussi deux comportements possibles :

- Comportement 1:

Quand les *nombres sont positifs*, on n'est *haut* donc la limite vaut +∞:

$$: \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

- Comportement 2:

Quand les *nombres sont négatifs*, on est *bas* donc la limite vaut -∞:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

-Comportement 1:

On commence par 0^+, on prend donc un nombre petit positif donc 0,01
qui donne f(0.01)= 1/0.01=100
Sa limite vaut donc +∞ :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

-Comportement 2:

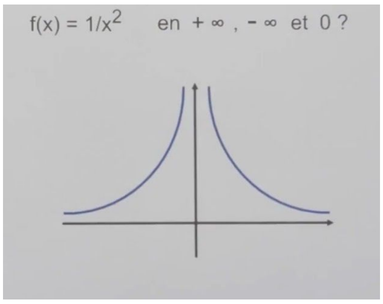
On commence par 0^-, on prend donc un nombre petit négatif donc -0,01
qui donne f(-0.01)= 1/-0.01=-100
Sa limite vaut donc +∞ :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

-Septième limites de références:

- *Retrouvées les limites de façon graphique :*

La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est définie sur ~~+∞, -∞ et 0~~]-∞;0[U]0;+∞[.



On voit que quand x tend vers +∞, la courbe se rapproche de plus en plus de 0 et sa limite vaut donc 0:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

De même, quand x tend vers -∞, la courbe se rapproche de plus en plus de 0 et sa limite vaut donc 0:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Quand x tend vers 0^+ et 0^-, la limite vaut +∞.

- *Retrouvées les limites par le calcul:*

Pour +∞, on prend un grand nombre positif donc f(100)= $1/100^2$=0,0001
On n'a donc une limite qui tend vers 0:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Pour -∞, on prend un grand nombre négatif donc f(-100)= $1/-100^2$=-0,0001
On n'a donc une limite qui tend vers 0:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Pour les limites quand x tend vers 0 :

-Comportement 1:
On commence par 0^+, on prend donc un petit nombre positif donc 0,01 qui donne f(0.01)= $1/0.01^2$=10 000.
Sa limite vaut donc +∞ :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} =+ \infty$$

-Comportement 2:
On commence par 0^-, on prend donc un nombre petit négatif donc -0,01 qui donne f(-0.01)= $1/-0.01^2$=-10 000.

Sa limite vaut donc +∞ :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} =+ \infty$$

Source: http://www.leprofduweb.com/

Remarque : Il faut savoir que les fonctions cosinus et sinus n'ont ni de limite en -∞ ni en +∞. ~~a cause de leur oscillation (= variation de courbe) permanente :~~

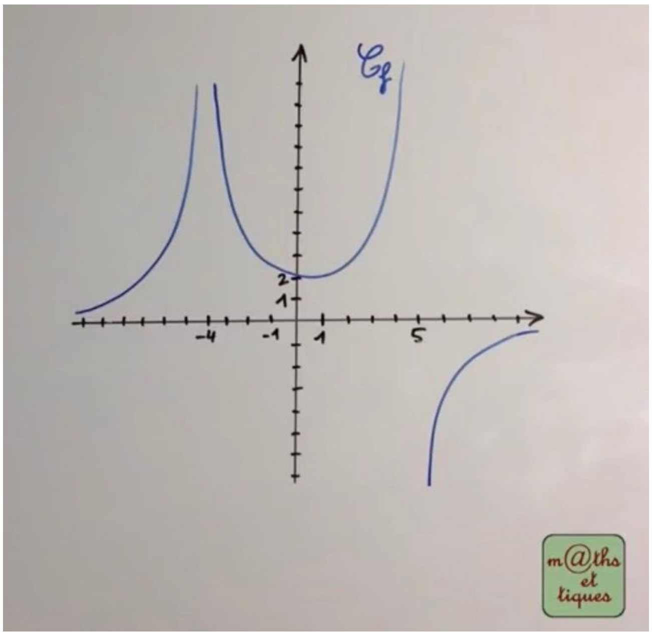
~~f(x) = cos(x)~~

~~f(x) = sin(x)~~

d) Interprétation graphiques des limites

La fonction f du graphique ci-dessous est définie sur l'union d'intervalle suivant :

]-∞;-4[U]-4;5[U]5;+∞[



Nous allons d'abord déterminer l'ensemble des limites:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Explication : on constate que la courbe en allant vers la gauche se rapproche de plus en plus de l'axe d'abscisse, cela veut dire que ces valeur tendent de plus en plus à se rapprocher de 0 lorsque x tend vers -∞. f(x) tend a se rapprocher de 0 donc la limite est égale à zéro.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Explication : on constate que le morceau de la courbe en bas à droite se rapproche de plus en plus de l'axe d'abscisse cela veut dire que ces valeur tendent de plus en plus à se rapprocher de 0 lorsque x tend vers +∞ f(x) tend a se rapprocher de 0 donc la limite est égale à zéro.

Lorsque l'on a une limite en l'infini qui se rapproche d'un nombre 0, cela signifie que la droite (ici l'axe des abscisse) est asymptote a la courbe représentative de la fonction, la courbe s'en rapproche sans jamais l'atteindre ce qui rend l'asymptote différent d'une tangente car la tangente touche la courbe donc cette droite est asymptote en -∞ mais aussi en +∞

- $\lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$

Explication (en venant de la gauche) : on constate que -4 est au niveau de la courbe en haut à gauche quand x se rapproche de plus en plus de -4 plus on tend vers le haut cela veut dire que ces valeur tendent de plus en plus à se rapprocher de +∞
lorsque x tend vers -4, f(x) tend a se rapprocher de +∞ donc la limite est égale à zéro.

- $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$

Explication (en venant de la droite) : on constate que -4 est au niveau de la courbe en haut à droite quand x se rapproche de plus en plus de -4 plus on tend aussi vers le haut cela veut dire que ces valeurs tendent de plus en plus à se rapprocher de +∞.
On peut conclure que la limite de f(x) quand x se rapproche de -4 est +∞:

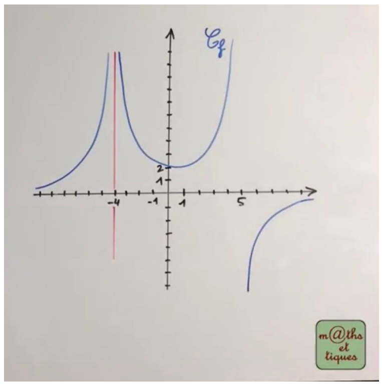
- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$

Explication (en venant de la gauche) : Quand on se rapproche de 5 on voit que l'on monte de plus en plus haut vers l'infini, donc la limite de f(x) quand x se rapproche de 5 est +∞.

- $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$

Explication (en venant de la droite) : Quand on se rapproche de 5 on voit que l'on descend de plus en plus bas vers l'infini, donc la limite de f(x) quand x se rapproche de 5 est -∞.

Pour conclure, on remarque que à gauche et à droite quand on tend vers +∞, on se rapproche de plus en plus d'une droite invisible, une droite invisible que nous allons rendre visible ci-dessous:



Tout à l'heure, on a parlé d'asymptote horizontal mais il existe aussi des asymptote vertical comme celle-ci, cette asymptote a un équation, l'équation est x=-4.
On dira que en -4, la courbe admet une asymptote vertical d'équation x=-4.

On peut faire la même chose en 5 on utilise là les deux côtés de la droite comme support car on avait pas la même limite quand on se positionne à gauche ou à droite, cette asymptote a un équation, l'équation est x=5.

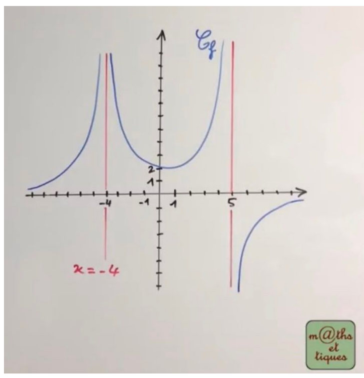
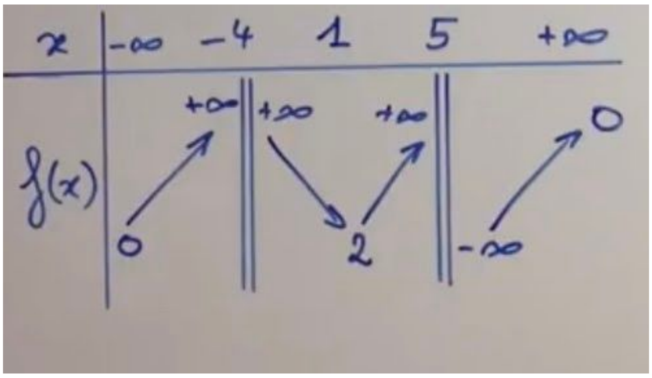


Tableau de variation:

<u>Explication:</u> entre -4 et 5 on ajoute 1 car on constate que a un moment les variations de la courbes change on n'a un minimum relatif qu'on pourrait évaluer en 1 c'est pour cela qu'on fait figurer la valeur 1 dans notre tableau de variation puisque les variation vont changer.
On ajoute des double barre à ce tableau car la fonction n'est pas défini en -4 et en 5
Ensuite on représente les variation à l'aide de flèche, avant -4 la fonction est croissante ↗
entre -4 et 5 c'est là ou on n'a un changement de variation qui ce passe en 1 donc on va avoir un flèche qui descend puis une flèche qui monte ↘↗, et enfin après 5 la fonction est tout le temps croissante donc on peut mettre une flèche qui monte ↗ .
Il reste donc plus qu'à mettre les limites aux bornes et la valeur du minimum qui s'évaluent graphiquement en 1 on obtient 2, pour le reste on va tout récupérer sur les limites qu'on n'a calculé précédemment.
Et tout cela nous donne le tableau de variation suivant:



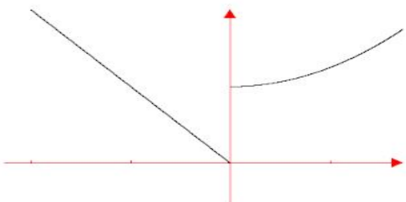
Source : http://www.maths-et-tiques.fr

<u>2. Continuité</u>

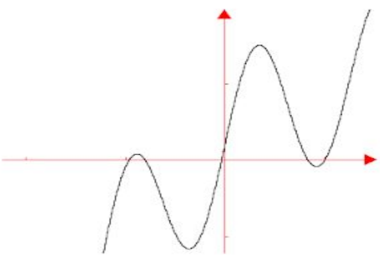
<u>a) Définition</u>

<u>~~En mathématiques,~~ Une fonction continue c une fonction que l'on peut relier sans lever le crayon sinon celle-ci n'est point continue</u>

<u>Exemple d'une fonction continue sur un intervalle:</u>



Une fonction discontinue en 0



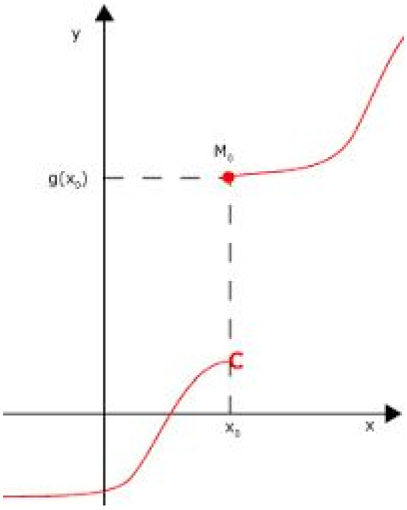
Une fonction continue en 0

Source : bibmath.net

b) Propriété:

~~Une fonction qui peut être dérivé et forcément une fonction continue~~

Toute fonction dérivable est continue.

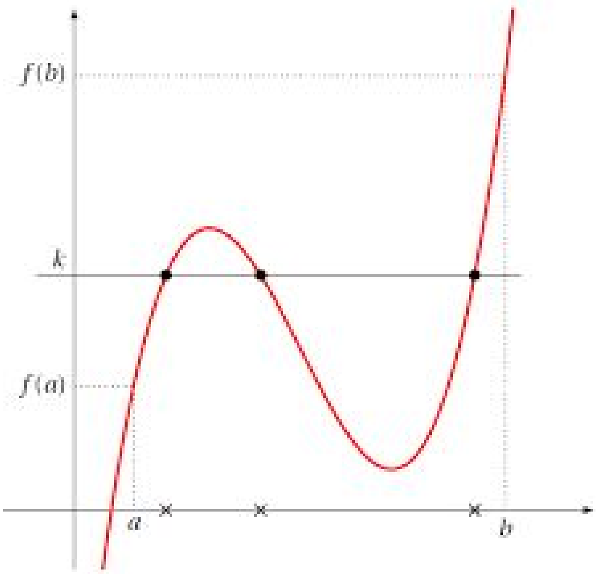


Par exemple : on peut voir ici que les *traits* ne sont pas reliés et que l'on ne peut pas ~~les~~ dériver la fonction en x_0 car on ne peut pas *faire de tangente*, donc ce n'est pas une fonction continue

Source : Maxicours

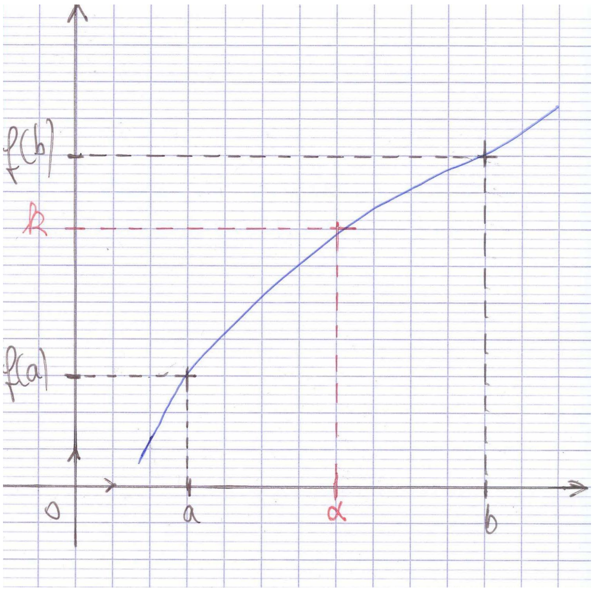
c) Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.

Soit f une fonction continue sur [a;b].Pour tout k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet au moins une solution sur [a;b]:



Corollaire:

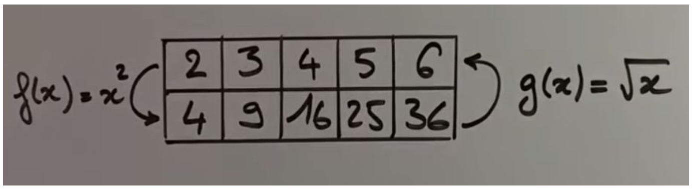
f est une fonction continue et strictement monotone sur [a;b], pour tout K compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet une seule solution:



En conclusion pour avoir le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on doit avoir :

- Changement de points
- Continuité
- Stricte monotonie

d) Fonction réciproque et propriété



f(2)=4	f(4)=16
g(4)=2	g(16)=4

Définition :

f fonction continue et strictement monotone.

On appelle **fonction réciproque** de f, la fonction g telle que:

$$f(a)=b \Leftrightarrow g(b)=a$$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x)=4x-2.
Déterminer la fonction réciproque de la fonction f.

On pose: f(a)=b, d'où

$$4a-2=b \Leftrightarrow 4a=b+2 \Leftrightarrow a=\frac{b}{4}+\frac{2}{4}$$

g(b)=a avec

$$g(x)=\frac{x}{4}+\frac{2}{4}$$

g est la fonction réciproque de f.

Source: Déterminer la fonction réciproque d'une fonction,maths-et-tiques

Lien des vidéos utilisées pour le cours:

1-b) Limite d'une fonction en un point:	Lien: https://youtu.be/DuAC9GaSciM
c) Application aux limites de références	Lien: https://www.youtube.com/watch?v=AJJCUVxLWgE
d) Interprétation graphiques des limites	Lien: https://www.youtube.com/watch?v=9nEJCL3s2eU
2-c)Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.	Lien: https://www.youtube.com/watch?v=ocepTsGVITs
d) Fonction réciproque et propriété	Lien: https://www.youtube.co10:30m/watch?v=bgINubYekqo Lien: https://youtu.be/mXnH_8yxFag