Corvée n°5 - Corrigé

Limites de fonctions - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 14/12/2020

Encouragements

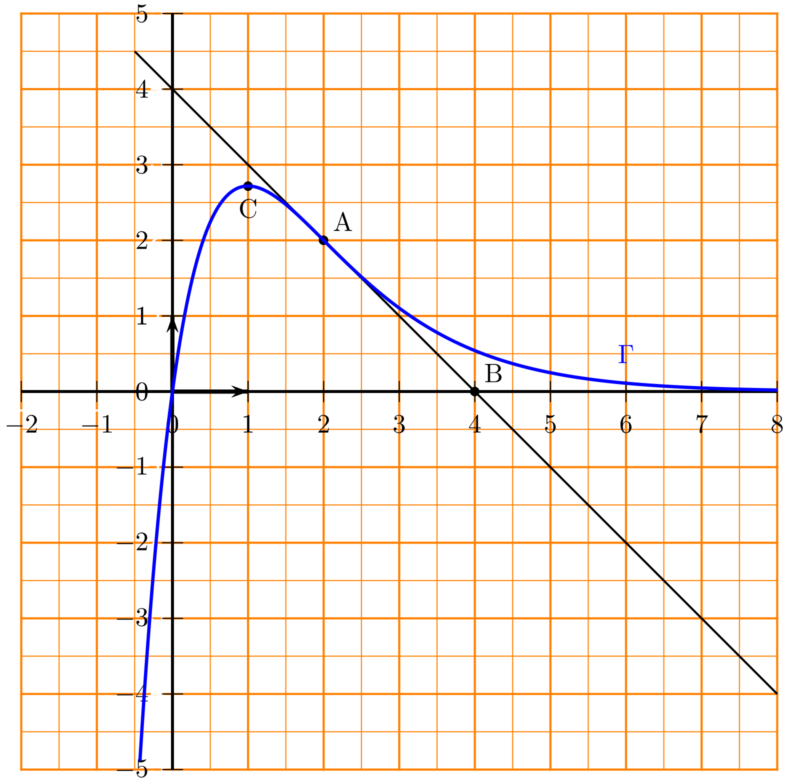
Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Gardez vos amis près de vous, mais gardez vos ennemis encore plus près.»

Michael Corleone, *Le Parrain, 2ème partie*, 1974. .

Exercice 1

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0\ ;\ 0)$ et A $(2\ ;\ 2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0),\ \ g(2),\ \ g'(1),\ \ g'(2)$.
On lit (et on sait que) $g(0) = 0,\quad g(2) = 2,\ \ g'(1) = 0,\quad g'(2) = -1$ car le coefficient directeur de la tangente est celui de la droite (AB).

2. On suppose que la fonction g est de la forme : $g(x) = (x + a)\mathrm{e}^{bx+c}$ où $a,\ b$ et c sont des nombres réels.
a. Démontrer que $a = 0$ et que $c = -2b$.
b. Déterminer $g'(x)$ en fonction de b et de x.
c. Calculer alors les valeurs de b et de c.
On va répondre aux questions **a.**, **b.** et **c.** d'un coup.

On a $g(0)=0$, $\quad g(2)=2$ et $g'(1)=0$.
Or $g'(x)=\mathrm{e}^{bx+c}+b(x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$. Ces trois conditions se traduisent par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\mathrm{e}^{c}\\2&=&(2+a)\mathrm{e}^{2b+c}\\0&=&(1+b+a)\mathrm{e}^{b+c}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\2&=&2\mathrm{e}^{2b+c}\\0&=&(1+b)\mathrm{e}^{b+c}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\1&=&\mathrm{e}^{2b+c}\\0&=&1+b\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\0&=&2b+c\\-1&=&b\end{array}\right.\iff$$
$$\left\{\begin{array}{lcl}0&=&a\\2&=&c\\-1&=&b\end{array}\right.$$

On a donc $g(x)=x\mathrm{e}^{-x+2}$ (et utile pour la suite $g'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x+2}$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe Γ au point A.
On rappelle la formule d'une équation de tangente (pour une fonction notée g) au point a :

$$y=g'(a)(x-a)+g(a)$$

Ici, on aura $a=2$, donc

$$\begin{aligned}y&=g'(2)(x-2)+g(2)\\&=-1\times\mathrm{e}^{0}(x-2)+2\\&=-x+4\end{aligned}$$

4. Calculer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
• Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+2=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x+2}=+\infty$ par composition de limites.
Puis, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{-x+2}=-\infty$ par produit de limites.

• On remarque que
$$x\mathrm{e}^{-x+2}=-\mathrm{e}^{2}\times(-x)\mathrm{e}^{-x}$$
Puis lorsque $x\to+\infty$, alors $-x\to-\infty$. Par conséquent, par croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty}(-x)\mathrm{e}^{-x}=0$$

Par suite, en multipliant par $-\mathrm{e}^{2}$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x+2}=0$

Exercice 2

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.
Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.
Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.
On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019+n$. On a ainsi $u_0=300$.

Partie A.

1.a. Déterminer u_1.
On retire 5 % à 300000, cela donne 285000 ; puis on ajoute 12000 tonnes, ce qui fait un total de 297000 tonnes en 2020. Donc $u_1=297$.

b. Justifier, pour tout entier naturel n, que $u_{n+1}=0,95u_n+12$.
Retirer 5 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{5}{100}=0,95$. Puis on ajoute 12 milliers, donc on passe de u_n, tonnage l'année n, à u_{n+1}, tonnage de l'année $n+1$, en multipliant par $0,95$ puis en ajoutant 12 : donc pour tout n, $u_{n+1}=0,95u_n+12$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-240$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ dont on précisera le premier terme v_0.

On a donc $u_n = v_n + 240$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 240 = 0,95u_n + 12 - 240 = 0,95\,(v_n + 240) - 228 = 0,95v_n + 228 - 228$
$\quad = 0,95v_n$
$v_0 = u_0 - 240 = 300 - 240 = 60$.

b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 60 \times 0,95^n$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.
Comme $u_n = v_n + 240$, on déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
$0 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 60 \times 0,95^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 240$.
Cela signifie que le tonnage de déchets recyclés va tendre vers 240000 tonnes.

Partie B.

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15 % d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Justifier que cet objectif ne sera pas atteint si la diminution des déchets suit les prévisions des experts.
Si la diminution des déchets suit les prévisions des experts, le tonnage des déchets recyclés sera en 2039, soit pour $n = 20$ de u_{20} milliers de tonnes.
$u_{20} = 60 \times 0,95^{20} + 240 \approx 261,509$; donc le tonnage en 2039 est d'environ 261509 tonnes.
On veut une baisse de 15 % par rapport à 2019, soit un tonnage de $300000\left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 255000$ tonnes.
L'objectif ne sera donc pas atteint.

2.a. Dans l'algorithme ci-dessous N est un nombre entier et U un nombre réel.
Recopier et compléter l'algorithme afin que la variable N contienne, à la fin de l'exécution de l'algorithme, l'année à partir de laquelle la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15 % par rapport à 2019.

```python
N=2019
U=300
while U>255:
    N=N+1
    U=0.95*U +12
print(N)
```

b. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?
$u_{27} \approx 255,02 > 255$ et $u_{28} \approx 254,27 \leqslant 255$ donc l'objectif sera atteint en $2019 + 28$ soit en 2047.