Corrigé du DS :

Exercice 1:

1. $Z = (1+i)^5$

$= \binom{5}{0} 1^{5-0} i^0 + \binom{5}{1} 1^{5-1} i^1 + \binom{5}{2} 1^{5-2} i^2 + \binom{5}{3} 1^{5-3} i^3 + \binom{5}{4} 1^{5-4} i^4$
$+ \binom{5}{5} 1^{5-5} i^5$

$= 1 \times 1 \times 1 + 5 \times 1 \times i + 10 \times 1 \times -1 + 10 \times 1 \times i + 5 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times i$

$= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i$

$= -4 - 4i$

2. $z = (2-2i)^3$

$= (2+(-2i))^3$

$= \binom{3}{0} 2^{3-0} (-2i)^0 + \binom{3}{1} 2^{3-1} (-2i)^1 + \binom{3}{2} 2^{3-2} (-2i)^2 + \binom{3}{3} 2^{3-3} (-2i)^3$

$= 1 \times 8 \times 1 + 3 \times 4 \times (-2i) + 3 \times 2 \times (-4) + 1 \times 1 \times 8i$

$= 8 - 24i - 24 + 8i$

$= -16 - 16i$

Exercice 2 :

1. $z - 2 = 3i + 2\bar{z}$ on pose $z = x + iy$

$\Leftrightarrow x + iy - 2 = 3i + 2(x - iy)$

$\Leftrightarrow -x + 3iy = 3i + 2$

$\Leftrightarrow -x = -2$ et $y = 1$

2. $\dfrac{z}{i-1} - i\bar{z} = \dfrac{1}{i+1}$ on pose $z = x + iy$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+iy}{i-1} - i(x-iy) = \dfrac{1}{i+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+iy)(i+1)}{(i-1)(i+1)} - i(x-iy) = \dfrac{1(i-1)}{(i+1)(i-1)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{ix+iy+x-y}{-2} - ix - y = \dfrac{i-1}{-2}$

$\Leftrightarrow ix + iy + x - y + 2ix + 2y = i - 1$

$\Leftrightarrow 3ix + iy + x + y = i - 1$

Ainsi :

$$\begin{cases} 3ix + iy = i \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$ et $y = -2$

Exercice III

1. Une racine évidente du polynome est $z = 2$:

$P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 6 \times 2 - 4$

$= 8 - 16 + 12 - 4$

$= 0$

2. Ainsi :

$P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$

$\Leftrightarrow az^3 - 2az^2 + bz^2 - 2bz + cz - 2c$

$\rightarrow a = 1$

$\Leftrightarrow z^3 - 2z^2 + bz^2 - 2bz + cz - 2c$

$\rightarrow b = -2$

$\Leftrightarrow z^3 - 4z^2 + 4z + cz - 2c$

$\rightarrow c = 2$

$\Leftrightarrow z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

$P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$

3. On cherche les solutions pour $z^2 - 2z + 2 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$

Ainsi, on admet deux solutions complexes :

- $z_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{4}}{2} = \underline{1 + i}$
- $z_2 = \dfrac{2 + i\sqrt{4}}{2} = \underline{1 - i}$

Exercice IV

(voir annexe numérique.)