Corvée n°4 - Corrigé

Vecteurs, droites et plans de l'espace - Terminale Spécialité Mathématiques

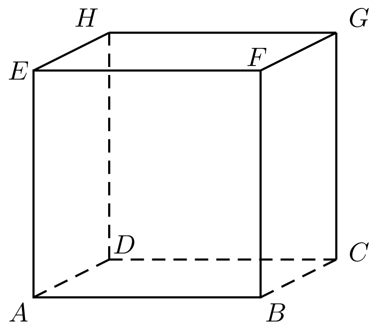
A rendre le : 30/11/2020

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

> *« La recherche a montré que nous finissons pratiquement tous par ressembler à la moyenne des cinq personnes avec lesquelles nous passons le plus de temps. Les individus que vous côtoyez le plus peuvent être le principal facteur conditionnant votre qualité de vie et la personne que vous devenez. Si vous êtes entouré de personnes paresseuses, faibles desprit et qui se cherchent sans cesse des excuses, vous finirez sans doute par leur ressembler. Passez du temps avec des personnes brillantes et positives et leurs attitudes et habitudes pertinentes déteindront sur vous. Vous leur ressemblerez de plus en plus. »*
>
> Hal Elrod, Miracle Morning.

Exercice 1



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
Pour tout nombre réel m, on définit le point G_m tel que :

$$\overrightarrow{G_mE}+(1-m)\overrightarrow{G_mB}+(2m-1)\overrightarrow{G_mG}+(1-m)\overrightarrow{G_mD}=\vec{0}$$

On admet que ce point G_m ainsi défini existe et qu'il est unique.

1. Reproduire la figure ci-dessus.
Le correcteur s'en passera...

2. Vérifier que $G_0 = A$.
D'une part, on commence par réécrire la relation vectorielle de l'énoncé pour $m = 0$ (*i.e.*)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_0E}+(1-0)\overrightarrow{G_0B}+(2\times 0-1)\overrightarrow{G_0G}+(1-0)\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\quad \overrightarrow{G_0E}+\overrightarrow{G_0B}-\overrightarrow{G_0G}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}\end{aligned}$$

D'autre part, comme on doit montrer que $A = G_0$, on écrit la relation de droite de notre précédente égalité, en remplaçant G_0 par A et on vérifie que cela donne le vecteur nul (*i.e.*)

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$$

Dans le cube $ABCDEFGH$, on remarque que $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}$. Par conséquent,

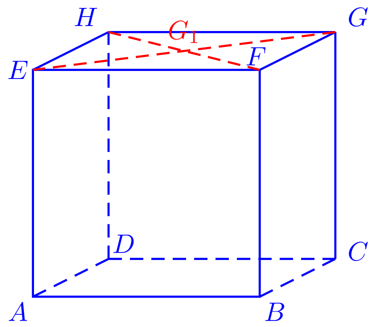
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

Puisque le point G_0 est unique, on a bien $A = G_0$.

3.a. Ecrire une égalité vectorielle vérifiée par le point G_1.
Comme précédemment, on écrit la relation vectorielle de l'énoncé pour $m = 1$ (*i.e.*)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_1E}+(1-1)\overrightarrow{G_1B}+(2\times 1-1)\overrightarrow{G_1G}+(1-1)\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\quad \overrightarrow{G_1E}+\overrightarrow{G_1G}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\quad \overrightarrow{G_1E}=-\overrightarrow{G_1G}\end{aligned}$$

b. En déduire la position de G_1 et placer ce point sur la figure.
La relation précédente ($\overrightarrow{G_1E} = -\overrightarrow{G_1G}$) nous indique que G est le milieu du segment $[EG]$.



4.b. Démontrer que, pour tout réel m, on a :

$$\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AG_1}$$

L'idée ici est d'abord de simplifier l'expression en utilisant la relation de Chasles puis ensuite, toujours par le relation de Chasles, de faire apparaître les points A et G_1 :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{G_mE} + (1-m)\overrightarrow{G_mB} + (2m-1)\overrightarrow{G_mG} + (1-m)\overrightarrow{G_mD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{G_mE} + \overrightarrow{G_mB} - m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mG} - \overrightarrow{G_mG} + \overrightarrow{G_mD} - m\overrightarrow{G_mD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{G_mE} + \overrightarrow{G_mB}\underline{-m\overrightarrow{G_mB} + m\overrightarrow{G_mG}} + m\overrightarrow{G_mG} - \overrightarrow{G_mG} + \overrightarrow{G_mD} - m\overrightarrow{G_mD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{G_mE} + \overrightarrow{G_mB} + m\overrightarrow{BG} + m\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{G_mG} + \overrightarrow{G_mD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \underline{\overrightarrow{G_mE}} + \underline{\overrightarrow{G_mB}} + m\overrightarrow{BG} + m\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BG} + m\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\overrightarrow{G_mA} + \cancel{\overrightarrow{AE}} + \cancel{\overrightarrow{AB}} + m\overrightarrow{BG} + m\overrightarrow{DG} + \cancel{\overrightarrow{GD}} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{BG} + m\overrightarrow{DG} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & -2\overrightarrow{AG_m} + m\overrightarrow{BA} + m\overrightarrow{AG} + m\overrightarrow{DA} + m\overrightarrow{AG} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & -2\overrightarrow{AG_m} + 2m\overrightarrow{AG} - m\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & -2\overrightarrow{AG_m} + 2m\overrightarrow{AG_1} + 2m\overrightarrow{G_1G} - m\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & -2\overrightarrow{AG_m} + 2m\overrightarrow{AG_1} + m\overrightarrow{EG} - m\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & -2\overrightarrow{AG_m} + 2m\overrightarrow{AG_1} + \cancel{m\overrightarrow{EG}} - \cancel{m\overrightarrow{AC}} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AG_1}
\end{aligned}$$

b. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
Puisque $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AG_1}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AG_m}$ et $\overrightarrow{AG_1}$ sont colinéaires et donc les points A, G_1 et G_m sont alignés. Par conséquent, $G_m \in (AG_1)$.

5. On note I le centre du carré $ABCD$.
Montrer que les points A, G_m, E et I sont coplanaires.
Pour $m = 0$, $G_0 = A$, donc il n'y a que trois points (A, E et I) et trois points sont toujours coplanaires. On peut donc supposer pour la suite que $m \neq 0$.

Pour montrer que les points A, G_m, E et I sont coplanaires, il faut trouver une relation vectorielle (plus précisement une combinaison linéaire) formée par les différents points. Allons-y !

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EG_1} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AG_1} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4m}\overrightarrow{AG_m} \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4m}\overrightarrow{AG_m}
\end{aligned}$$

On vient de montre que $\overrightarrow{AI}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG_m}$, donc les points A, G_m, E et I sont coplanaires.

Exercice 2

Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(2;1;5)$, $B(4;2;4)$, $C(3;3;5)$ et $D(0;3;7)$.

1. Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ? **Justifier.**
Pour montrer que les droites sont parallèles (ou non), il suffit de regarder la colinéarité (ou non) des vecteurs directeurs des droites (AD) et (BC). Or

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 3-2 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque aisément que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, ainsi les vecteurs sont colinéaires et donc les droites (AD) et (BC).

2. Déterminer une relation vectorielle liant les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Il suffit de reprendre la relation précédente et d'appliquer la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3. Que retrouve-t-on grâce au résultat précédent au sujet des points A, B, C et D ?
On vient de montre que $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

4. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? **Justifier.**

Le fait que les points A, B, C et D soient coplanaires ne garantit pas que les droites (AB) et (CD) soient sécantes.
Si les droites (AB) et (CD) sont effectivement sécantes, alors leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-3 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Du fait de la présence du 0 dans le deuxième coordonnée de $\overrightarrow{CD}$, on en déduit que les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.