Corrigé Corvée n°1

Divisibilité - Terminale Mathématiques expertes

A rendre le : 14/10/2020

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Quiconque sauve une vie, sauve le monde entier. »

Itzak Stern, *La liste de Schindler* (1993).

Exercice 1

Démontrer la proposition suivante :

Un entier est divisible par 9, si et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Je vous propose deux méthodes de résolution pour cet exercice.

Méthode 1 : Sans les congruences comme les bébés.

Soit N un entier écrit sous la forme $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.
Cela signifie que N s'écrit de la forme $a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, les coefficients a_i étant des entiers compris entre 0 et 9 (a_n non nul).

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1, \\ 100 &= 99 + 1, \\ 1000 &= 999 + 1, \\ 10000 &= 9999 + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entiern naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 9. Ainsi,

$$\begin{aligned} N &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= a_n(10^n - 1 + 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1 + 1) + \dots + (a_2 10^2 - 1 + 1) + (a_1 10 - 1 + 1) + a_0 \\ &= \underbrace{a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + (a_2 10^2 - 1) + (a_1 10 - 1)}_{\text{multiple de 9}} + a_{n-1} + a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Donc N est divisible par 9, si et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Méthode 2 : Avec les congruences comme les grands.

Soit N un entier écrit sous la forme $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.
Cela signifie que N s'écrit de la forme $a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, les coefficients a_i étant des entiers compris entre 0 et 9 (a_n non nul).
Puisque $10 \equiv 1\ [9]$, alors $10^n \equiv 1\ [9]$ pour tout entier naturel n (compatibilité avec les puissances).
Par suite, par compatibilité avec la multiplication

$$\begin{aligned} a_0 10^0 &\equiv a_0 \times 1\ [9] \\ a_1 10^1 &\equiv a_1 \times 1\ [9], \\ a_2 10^2 &\equiv a_2 \times 1\ [9], \\ &\vdots \\ a_n 10^n &\equiv a_n \times 1\ [9] \end{aligned}$$

Finalement, par compatibilité avec l'addition, on a :

$$\underbrace{a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0}_{=N} \equiv a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \ [9]$$

Par conséquent, N est divisible par 9, si et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exercice 2

Le chiffrement de Vigenère introduit le principe de clé se présentant généralement sous la forme d'un mot (ou d'une phrase) que l'on répète. Plus la clé est longue et variée, mieux le texte sera chiffré.

On considère la méthode de chiffrement suivante.
A chaque lettre de l'alphabet, on fait correspondre sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire un entier entre 0 et 25 (A correspond à 0, B à 1, etc.).
A chaque lettre à coder, on associe l'entier x correspondant. A chaque lettre de la clé, on associe l'entier y correspondant.
On détermine l'entier z, où z est le reste de la division euclidienne de $x+y$ par 26.
La lettre chiffrée sera obtenue avec le nombre z.

Exemple : Codage du mot `VIGENERE` en utilisant la clé `DEUX`. On obtient le mot `YMABQILB`.

Mot à coder	**V**	**I**	**G**	**E**	**N**	**E**	**R**	**E**
x	21	8	6	4	13	4	17	4
Clé	**D**	**E**	**U**	**X**	**D**	**E**	**U**	**X**
y	3	4	20	23	3	4	20	23
z	24	12	0	1	16	8	11	1
Mot codé	**Y**	**M**	**A**	**B**	**Q**	**I**	**L**	**B**

1. On considère le chiffrement de Vigenère utilisant la clé `MATH`. Vérifier que le mot *DIVISIBILITE* est codé par `PIOPEIUPXIML`.

Mot à coder	**D**	**I**	**V**	**I**	**S**	**I**	**B**	**I**	**L**	**I**	**T**	**E**
x	3	8	21	8	18	8	1	8	11	8	19	4
Clé	**M**	**A**	**T**	**H**	**M**	**A**	**T**	**H**	**M**	**A**	**T**	**H**
y	12	0	19	7	12	0	19	7	12	0	19	7
z	15	8	14	15	4	8	20	15	23	8	12	11
Mot codé	**P**	**I**	**O**	**P**	**E**	**I**	**U**	**P**	**X**	**I**	**M**	**L**

2. On veut déchiffrer le mot `ECBLZTBMUQNL`, la clé étant toujours `MATH`.
a. Montrer que déchiffrer la lettre E revient à résoudre l'équation $x \equiv 18 \ [26]$. En déduire la lettre déchiffrée.
Le nombre codant la lettre `E` est 4. Le but est donc de trouver la valeur de x tel que

$$x + 12 \equiv 4 \ [26]$$

Remarque : Le 12 vient du fait que la clé est `MATH` et que la lettre `M` (codée par 12) est "en face" de la lettre `E`.
Par suite,

$$\begin{aligned} x + 12 \equiv 4 \ [26] &\Leftrightarrow \quad x \equiv -8 \ [26] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv -8 \ [26] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv 18 \ [26] \end{aligned}$$

La lettre codée vérifie $x \equiv 18 \ [26]$ et ainsi, on a donc $x = 18$ qui correspond à la lettre `S`.
b. Déchiffrer le reste du mot.
On va donner la méthode pour les trois lettres suivantes (*i.e.*) les lettres `CBL`.
• Pour la lettre `C`, on cherche x tel que

$$x + 0 \equiv 2 \ [26]$$

(**Remarque :** Le 0 vient du fait que la clé est `MATH` et que la lettre `A` (codée par 0) est "en face" de la lettre `C`.)
Par suite,

$$x + 0 \equiv 2 \ [26] \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 2 \ [26]$$

La lettre codée vérifie $x \equiv 2$ [26] et ainsi, on a donc $x = 2$ qui correspond à la lettre `C`.

• <u>Pour la lettre `B`</u>, on cherche x tel que

$$x + 19 \equiv 1 \; [26]$$

(**Remarque :** Le 19 vient du fait que la clé est `MATH` et que la lettre `T` (codée par 19) est "en face" de la lettre `B`.)

Par suite,

$$\begin{aligned} x + 19 \equiv 1 \; [26] \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv -18 \; [26] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv 8 \; [26] \end{aligned}$$

La lettre codée vérifie $x \equiv 8$ [26] et ainsi, on a donc $x = 8$ qui correspond à la lettre `I`.

• <u>Pour la lettre `L`</u>, on cherche x tel que

$$x + 7 \equiv 11 \; [26]$$

(**Remarque :** Le 7 vient du fait que la clé est `MATH` et que la lettre `H` (codée par 7) est "en face" de la lettre `L`.)

Par suite,

$$x + 7 \equiv 11 \; [26] \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 4 \; [26]$$

La lettre codée vérifie $x \equiv 4$ [26] et ainsi, on a donc $x = 4$ qui correspond à la lettre `E`.

Pour le reste du mot, la méthode est similaire. On trouve le mot `SCIENTIFIQUE`.

<u>Exercice 3</u>

Soit n et p deux entiers naturels distincts tels que $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$.
On appelle diviseur strict de n tout diviseur positif de n différent de n.
On dit que les nombres n et p sont *amicaux* lorsque chacun des deux nombres est égal à la somme des diviseurs positifs stricts de l'autre.

Compléter la fonction en Python ci-dessous qui retourne la somme des diviseurs stricts d'un nombre entier $n \geqslant 2$.

```
def somme_diviseurs_strict(n):
    S=[redacted]
    for i in range(1,[redacted]):
        if int(n/i)==[redacted]:
            S=S+[redacted]
    return S
```

Voici une solution possible :

```
def somme_diviseurs_strict(n):
    S=0
    for i in range(1,n):
        if int(n/i)==n/i:
            S=S+i
    return S
```