

# Corrigé - Calvaire I

## Divisibilité

Terminale Mathématiques expertes

### Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« C'est arrivé auparavant, alors ça recommencera. »

Le livre d'Eli, Carnegie, 2010.

### Exercice 1



≈ 10 minutes

Calculer - Raisonner

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'entier défini par  $P(n) = n^3 + 3n^2 + 11n + 20$ .

1. Déterminer l'entier  $r$  tel que :

$$P(n) = (n + 2)(n^2 + n + 9) + r$$

Pour trouver  $r$ , on va procéder par *identification*.

$$\begin{aligned}(n + 2)(n^2 + n + 9) + r &= n \times n^2 + n \times n + n \times 9 + 2 \times n^2 + 2 \times n + 2 \times 9 + r \\ &= n^3 + n^2 + 9n + 2n^2 + 2n + 18 + r \\ &= n^3 + 3n^2 + 11n + 18 + r\end{aligned}$$

Comme cette dernière expression est égale à  $P(n)$  qui vaut (initialement)  $n^3 + 3n^2 + 11n + 20$ . On a nécessairement  $r = 2$ .

2. Justifier que  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $P(n)$  par  $n + 2$ .

On a donc  $P(n) = (n + 2)(n^2 + n + 9) + 2$ , puisque  $2 < n + 2$  (car  $n \neq 0$ ), il s'agit donc bien du reste de la division euclidienne de  $P(n)$  par  $n + 2$ .

### Exercice 2



≈ 5 minutes

Calculer

1. Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $6x \equiv 2 [7]$ .

On utilise un tableau de congruence et la compatibilité avec la multiplication pour raisonner par disjonction de cas.

Si $x \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
alors $6x \equiv \dots [7]$	0	1	5	4	3	2	1

On constate que le seul cas qui convient est  $x \equiv 5 [7]$ . Comme nous cherchons des solutions dans  $\mathbb{N}$ , on a

$$\mathcal{S} = \{7k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $5x + 2 \equiv 13 [5]$ .

$$5x + 2 \equiv 13 [5] \Leftrightarrow 5x + 2 - 2 \equiv 13 - 2 [5] \Leftrightarrow 5x \equiv 11 [5] \Leftrightarrow 5x \equiv 1 [5]$$

On utilise encore un tableau de congruence et la compatibilité avec la multiplication pour raisonner par disjonction de cas.

Si $x \equiv \dots [5]$	0	1	2	3	4
alors $5x \equiv \dots [5]$	0	0	0	0	0

On constate qu'il n'y a pas de solutions (*i.e.*)  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

### Exercice 3



≈ 5 minutes

Calculer - Modéliser

On a obtenu les résultats suivants dans la console Python.

```
>>> A//4
2
>>> A//5
2
```

```
>>> A%4
3
>>> A%5
1
```

Quelle est la valeur de l'entier  $A$  ?

Il convient de réécrire les lignes de la console Python sous forme d'égalité. Le fait que  $A//4 = 2$  signifie que le quotient de  $A$  par 4 vaut 2 puis que  $A\%4 = 3$  signifie que le reste de  $A$  par 4 vaut 3. On a donc :

$$A = 2 \times 4 + 3 = 11$$



Remarque

Dans cet exercice, il y a plus d'informations que nécessaire pour trouver la solution.

