Corrigé - Rattrapage du Calvaire II

Limites de suites

Terminale Spécialité Mathématiques

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

> *« Lorsque le dernier arbre aura été coupé, le dernier poisson pêché et la dernière rivière polluée ; quand respirer l'air sera écoeurant, vous vous rendrez compte, trop tard, que la richesse n'est pas dans les comptes bancaires et que vous ne pouvez pas manger de l'argent. »*
>
> Alanis Obomsawin.

I - Etude classique d'une suite

Exercice 1 $\simeq$ 30 minutes

Calculer - Raisonner

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1.a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.

• *Initialisation* : On a $u_0 = 1,\ u_1 = -\dfrac{1}{2},\ u_2 = -\dfrac{1}{4}$ et $u_3 = \dfrac{7}{8} \geqslant 0$.
La relation est vraie au rang 3.

• *Hérédité* : Soit un naturel $n,\ n \geqslant 3$, et supposons que $u_n \geqslant 0$, alors
$u_{n+1} = \dfrac{1}{2} + n - 1$. Or $n \geqslant 3 \iff n - 1 \geqslant 2$, donc $u_{n+1} \geqslant 2 > 0$.
L'hérédité est démontrée.

La relation est vraie au rang 3, et si elle est vraie Ã un rang au moins égal à 3 elle est vraie au rang suivant ; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.

b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
$n \geqslant 4 \iff n - 1 \geqslant 3$; d'après **1.a.**,
$u_{n-1} \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2}u_{n-1} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geqslant n - 2 \iff \dfrac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1 \geqslant n - 2 \iff u_n \geqslant n - 2.$

c. En déduire la limite de la suite (u_n).
Par comparaison, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty,\ \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 &= 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) + 24 \\ &= 2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 \\ &= 2u_n - 4n + 12 \\ &\frac{1}{2}\left(4u_n - 8n + 24\right) = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

On a donc démontré que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. La raison étant inférieure à 1, cette suite est décroissante. De plus

$$v_0 = 4u_0 + 24 = 28$$

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

On a immédiatement

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24 \iff 4u_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24 \iff u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

. **c.** Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

On a donc

$$u_n = \underbrace{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{suite géométrique}} + \underbrace{2n - 6}_{\text{suite arithmétique}} = x_n + y_n$$

où (x_n) est la suite (v_n) au facteur 4 près et la suite (y_n) est définie par $y_n = 2n - 6$, suite arithmétique de raison 2 et de premier terme -6.

d. En déduire l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k$$

.

Or

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{7 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 14 - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = \frac{(n+1)(-6 + 2n - 6)}{2} = (n+1)(n-6)$$

Finalement $\boxed{S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$

II - QCM

Exercice 2 $\simeq$ 30 minutes

Chercher - Calculer

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. **Une justification est demandée à chaque question !**
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barême, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

$$\textbf{a. } \left(\frac{2^n}{n^{2020}}\right)_{n>0} \quad \textbf{b. } \left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textbf{c. } \left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$$

a. $\dfrac{2^n}{n^{2005}} = \mathrm{e}^{n\ln 2 - 2005\ln n}$ a pour limite $+\infty$: elle diverge.

b. $\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{2+(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} \to 2$: elle converge.

c. $n\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} \to 1$: elle converge.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.
Alors :
a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$. Faux ! On ne peut pas savoir.
b. La suite (u_n) est minorée. Vrai.
c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$. Faux ! Pas forcément.
d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non. Vrai.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 1,5 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$
a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x-1$.
Non car elle est croissante et $u_1 = 2$.
b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.
Vrai : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$. (raison 2)
c. La suite (v_n) est majorée. Faux ! La raison est supérieure à 1.
d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.
La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.
Faux ! La suite (x_n) est décroissante :
$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{n} - \ldots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0.$
b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.
Vrai.
$x_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{20+15+12+10}{60} = \dfrac{57}{60} = \dfrac{19}{20}$
$y_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{15+12+10}{60} = \dfrac{37}{60}$.
c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.
Faux pour (x_n), car cette suite décroissante est majorée par son premier terme.