Corrigé - Calvaire II

Matrices et opérations élémentaires

Terminale Mathématiques expertes

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« C'est arrivé auparavant, alors ça recommencera. »

Le livre d'Eli, Carnegie, 2010.

Exercice 1

$\simeq$ 15 minutes

Raisonner

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Faire une conjecture sur l'expression de A^n.

On conjecture que A^n à la forme suivante :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Valider cette conjecture par récurrence.

Enoncé : Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration :

• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

• Initialisation : Soit $n = 0$. Nous devons donc montrer que $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

D'une part, $A^0 = I_2$ (par définition).

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc bien montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel k ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \ : \ « \ A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ »$$

• Hérédité :

$$\begin{aligned}A^{k+1} &= A^k \times A\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\times 1+2k\times 0 & 1\times 2+2k\times 1\\ 0\times 1+1\times 0 & 0\times 2+1\times 1\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}1 & 2k+2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

•Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 2 $\simeq$ 10 minutes

Calculer

On définit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

1. Justifier que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

Rappels de cours

• Soit $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de A est le réel, noté $\det(A)$, défini par

$$\det(A) = ad - bc$$

• Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.
En particulier, si $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant de A :

$$\det(A) = 3\times 7 - 4\times 5 = 21 - 20 = 1$$

Comme $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible.
Pour trouver l'inverse de la matrice A, on utilise la formule du rappel :

$$A^{-1} = \frac{1}{3\times 7 - 4\times 5}\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

2. En déduire une écriture matricielle et une solution des systèmes suivants :

a. $\begin{cases}3x+4y &= 2\\ 5x+7y &= 4\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}7x-4y &= -21\\ -5x+3y &= 11\end{cases}$

a.

$$\begin{cases} 3x+4y &= 2 \\ 5x+7y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}_{=I_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}}_{=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{cases} 7x-4y &= -21 \\ -5x+3y &= 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -21 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -21 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$\simeq$ 10 minutes

Modéliser

On considère la fonction Python ci-dessous.

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

def produit(x,y,z):
    A=array([[3,5,-1],[4,2,1],[-3,-1,7]])
    B=array([[x],[y],[z]])
    return dot(A,B)
```

1. Que renvoie cette fonction si on entre en arguments 2, 1 et 4 ?

En entrant en arguments 2, 1 et 4, cette fonction renvoie la multiplication de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Que fait cette fonction ?

Cette fonction renvoie la multiplication de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

3. En Python, il est possible de transposer un vecteur avec une commande très simple : `.T`. Par exemple :

```
>>> from numpy import *
>>> from numpy.linalg import *
>>> B=array([[3],[2],[1]])
array([[-10],
       [  3],
       [ 20]])
>>> B.T
array([[3, 2, 1]])
```

Modifier le programme de la fonction pour qu'elle renvoie le produit de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ par la matrice ligne $B = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

Voici une proposition de modification :

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

def produit(x,y,z):
    A=array([[3,5,-1],[4,2,1],[-3,-1,7]])
    B=array([[x],[y],[z]])
    return dot(B.T,A)
```
