Corrigé - Calvaire I

Probabilités conditionnelles et loi uniforme discrète

Terminale Mathématiques complémentaires

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Seule la paresse fatigue le cerveau. »

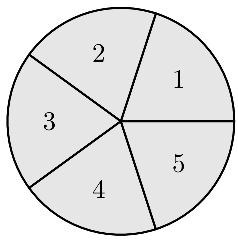
Louis Pauwels

Exercice 1

$\simeq$ 10 minutes

Calculer

On fait tourner cette roue équilibrée où tous les secteurs ont le même angle.



a. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu.
Quelles sont les valeurs prises par X ?
Présenter sa loi de probabilité dans un tableau.
X suit-elle une loi uniforme ?
X prend les valeurs 1, 2, 3 4 et 5.
Voici la loi de probabilité de X sous forme de tableau :

Valeurs x_k prises par X	1	2	3	4	5
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

X suit une loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ car pour tout $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{5}$

b. Y est la variable aléatoire qui donne la parité du numéro obtenu.
Quelles sont les valeurs prises par Y ?
Présenter sa loi de probabilité dans un tableau.
Y suit-elle une loi uniforme ?

Y donne **la parité** du numéro obtenu. C'est à dire que les résultats qu'on attend, c'est *Pair* et *Impair*. Aussi bizarre que cela puisse paraître, les *valeurs* de Y sont les mots *Pair* et *Impair*.

Valeurs y_k prises par Y	*Pair*	*Impair*
Probabilité $P(Y = y_k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

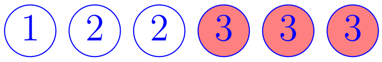
Y ne suit pas une loi uniforme car nous n'obtenons pas la même probabilité pour les différents événements.

Exercice 2 ≃ 10 minutes

Calculer

Une urne contient une boule blanche numérotée 1, deux boules blanches numérotées 2 et trois boules rouges numérotées 3.
On tire au hasard une boule dans l'urne.

Associer à cette situation une variable aléatoire qui suit une loi uniforme discrète.
Cela peut paraître "bête" mais il semble important de faire un schéma de la situation pour visualiser une "situation uniforme" :



On remarque qu'il n'y a pas le même nombre de boules portant le même numéro. Donc le "numéro" des boules ne pourra représenter une loi uniforme ! En revanche, il y a le même nombre de boules blanches et rouges ! On tient donc notre loi uniforme ! Représentée sous forme d'un tableau, on a :

Valeurs x_k prises par X	*Blanc*	*Rouge*
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exercice 3 ≃ 15 minutes

Calculer - Représenter

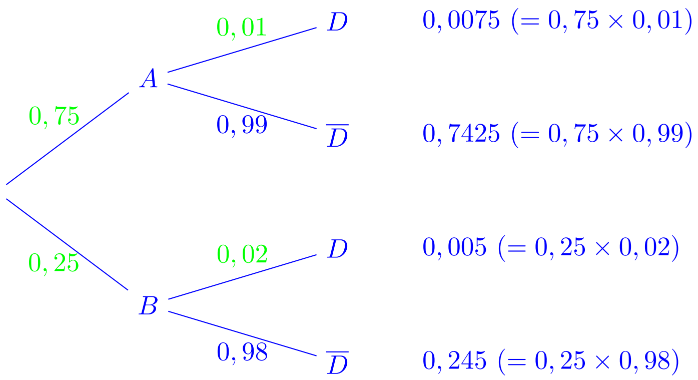
Une entreprise fabrique des pièces détachées pour l'industrie automobile. Elle possède deux machines différentes qui fabriquent le même enjoliveur de roue. La machine A fabrique 75% des pièces par jour, la machine B, plus petite, n'en fabrique que 25%. Le taux de pièces défectueuses de la machine A est estimé à 1%. Celui de la machine B est estimé à 2%.
Au service de contrôle qualité, on choisit une pièce au hasard dans la production du jour et on teste sa conformité. Si la pièce est défectueuse, le service veut esssayer de déterminer s'il est plus probable qu'elle provienne de la machine A ou de la machine B.

On assimile les fréquences observées à des probabilités et on note :
- A l'événement « *La pièce a été fabriquée par la machine A* » ;
- B l'événement « *La pièce a été fabriquée par la machine B* » ;
- D l'événement « *La pièce est défectueuse* ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
Dans cette question, il suffit tout simplement de relire attentivement l'énoncé et de traduire les évènements sous forme mathématique :

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,75 \\ P(B) &= 0,25 \\ P_A(D) &= 0,01 \\ P_B(D) &= 0,02 \end{aligned}$$

2. Représenter cette situation par un arbre de probabilité en complétant les valeurs sur toutes les branches.
Voici l'arbre de probabilité (en vert les valeurs de l'énoncé) :



3. En utilisant la formule des probabilités totales et la formule de Bayes, calculer $P(D)$, $P_D(A)$ et $P_D(B)$.

• **Calcul de $P(D)$:**

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,0075 + 0,005 = 0,0125$$

• **Calcul de $P_D(A)$:**

D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_D(A) = \frac{P_A(D) \times P(A)}{P(D)} = \frac{0,01 \times 0,75}{0,0125} = 0,6$$

• **Calcul de $P_D(B)$:**

D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_D(B) = \frac{P_B(D) \times P(B)}{P(D)} = \frac{0,02 \times 0,25}{0,0125} = 0,4$$

4. Sachant que la pièce est non conforme, est-il plus probable qu'elle provienne de la machine A ou de la machine B ?

Puisque $P_D(A)$ est supérieure à $P_D(B)$, si l'on sait que la pièce est non conforme, alors il est plus probable qu'elle vienne de la machine A plutôt que de la machine B.
