Corvée n°2

Limites de suites
Terminale Mathématiques complémentaires

A rendre le : 00/00/2020

Encouragements

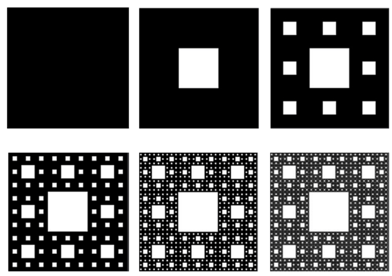
Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Si vous parlez à Dieu, vous êtes croyant. S'il vous répond, c'est que vous êtes schyzo. »

Gregory House, *Docteur House* (2004).

Exercice 1

On va s'intéresser à une très célèbre et jolie figure géométrique : le tapis de Sierpiński.
On considère un carré dont l'aire est de 1 m^2. Pour construire la figure ci-dessous, on partage ce carré en neuf carrés égaux et on colorie en blanc celui du centre.
On partage ensuite chacun des huits carrés restants en neuf carrés égaux et on colorie en blanc les huits au centre.
On recommence cette construction à chaque étape. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_1 l'aire totale coloriée en blanc après la n-ième étape. On a donc $A_1 = \frac{1}{9}$.



Tapis de Sierpiński, de l'étape 0 *à* 5

1.a. Quelle proportion de la surface noire restante est coloriée en blanc à chaque étape ?
b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$.
a. Montrer que la suite (B_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
b. Exprimer B_n en fonction de n.
c. Exprimer alors A_n en fonction de n.
d. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} A_n$.

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$.
Voici la fonction `Seuil` ci-contre, écrire en langage Python.

```python
def Seuil(m):
    n=0
    u=0
    while u<m:
        u=4*u+3
        n=n+1
    return n
```

1. Quelle est le rôle de la fonction `Seuil` ?
2. Saisir et exécuter ce programme pour :

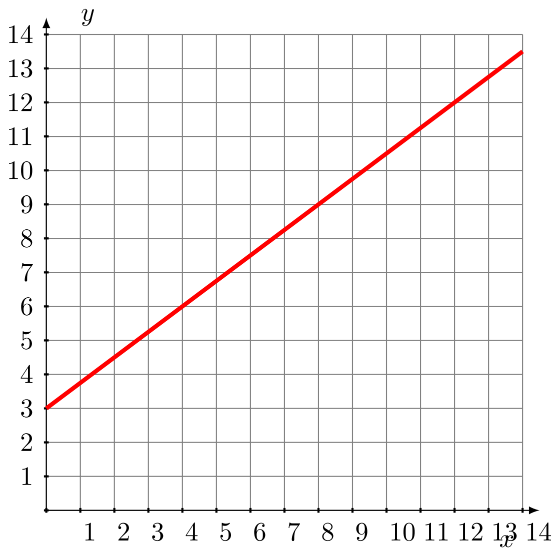
• $m = 1000$, • $m = 100000$

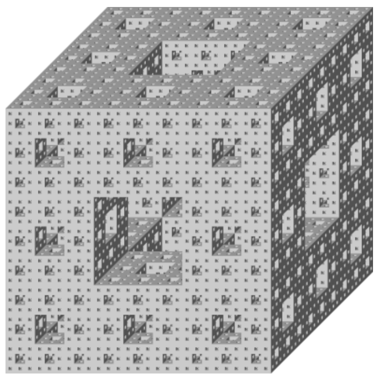
3. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Dans une population d'abeilles, on dénombre 6 000 individus l'année 0. Chaque année, 25% de ces abeilles disparaissent et on introduit dans la population 3 000 abeilles supplémentaires.
On note u_n le nombre d'insectes vivants l'année n et u_n est exprimé en millier.

1. Justifier que $u_0 = 6$.
2. Calculer u_1. Combien y a-t-il d'abeilles l'année 1 ?
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,75u_n + 3$.
4.a. Reproduire le graphique ci-contre et représenter avec précision les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite.
b. Emettre une conjecture sur le sens de variation de la suite.
c. Expliquer pourquoi le graphique permet de conjecturer qu'il existe un plus petit nombre réel M tek que $u_n \leqslant M$.
Déterminer graphiquement ce nombre M.
Quelle interprétation peut-on faire de ce nombre M ?





L'éponge de Menger : une version 3D du tapis de Sierpiński