Corrigé - Corvée n°2

Matrices et opérations élémentaires - Terminale Mathématiques expertes

A rendre le : 00/00/2020

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« La mort est une journée qui mérite d'être vécue. »

Hector Barbosa, *Pirates des Caraïbes, jusqu'au bout du monde* (2007).

Exercice 1

Une société fabrique et vend une quantité x d'objets, exprimée en milliers.
Le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'objets est donné par $C(x) = ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois nombres réels que l'on souhaite déterminer.
On sait que :
- le coût de fabrication de 4 000 objets s'élève à 63 000 €,
- que celui de 10 000 objets s'élève à 165 000 € et
- de 20 000 objets s'élève à 415 000 €.

1. Justifier que les informations sur C peuvent se traduire sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} 16a+4b+c &= 63 \\ 100a+10b+c &= 165 \\ 400a+20b+c &= 415 \end{cases}$$

On rappelle que le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'objets est donné par $C(x) = ax^2+bx+c$. On a donc d'après les informations sur C :

$$\begin{cases} C(4) &= 63 \\ C(10) &= 165 \\ C(20) &= 415 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^2a+4b+c &= 63 \\ 10^2a+10b+c &= 165 \\ 20^2a+20b+c &= 415 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a+4b+c &= 63 \\ 100a+10b+c &= 165 \\ 400a+20b+c &= 415 \end{cases}$$

2. Montrer que le système obtenu s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et A et B sont deux matrices à préciser.

$$\begin{cases} 16a+4b+c &= 63 \\ 100a+10b+c &= 165 \\ 400a+20b+c &= 415 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 165 \\ 415 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit bien sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 63 \\ 165 \\ 415 \end{pmatrix}$.

3. A l'aide d'un calcul matriciel et de la calculatrice, déterminer a, b et c.
Déterminer a, b et c revient à déterminer X dans l'équation $AX = B$. Or :

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

En utilisant Python (ou la calculatrice), on a :

```
>>> from numpy import *
>>> from numpy.linalg import *

>>> A=array([[16,4,1],[100,10,1],[400,20,1]])
>>> B=array([[63],[165],[415]])

>>> X=dot(inv(A),B)
array([[ 0.5],
       [10. ],
       [15. ]])
```

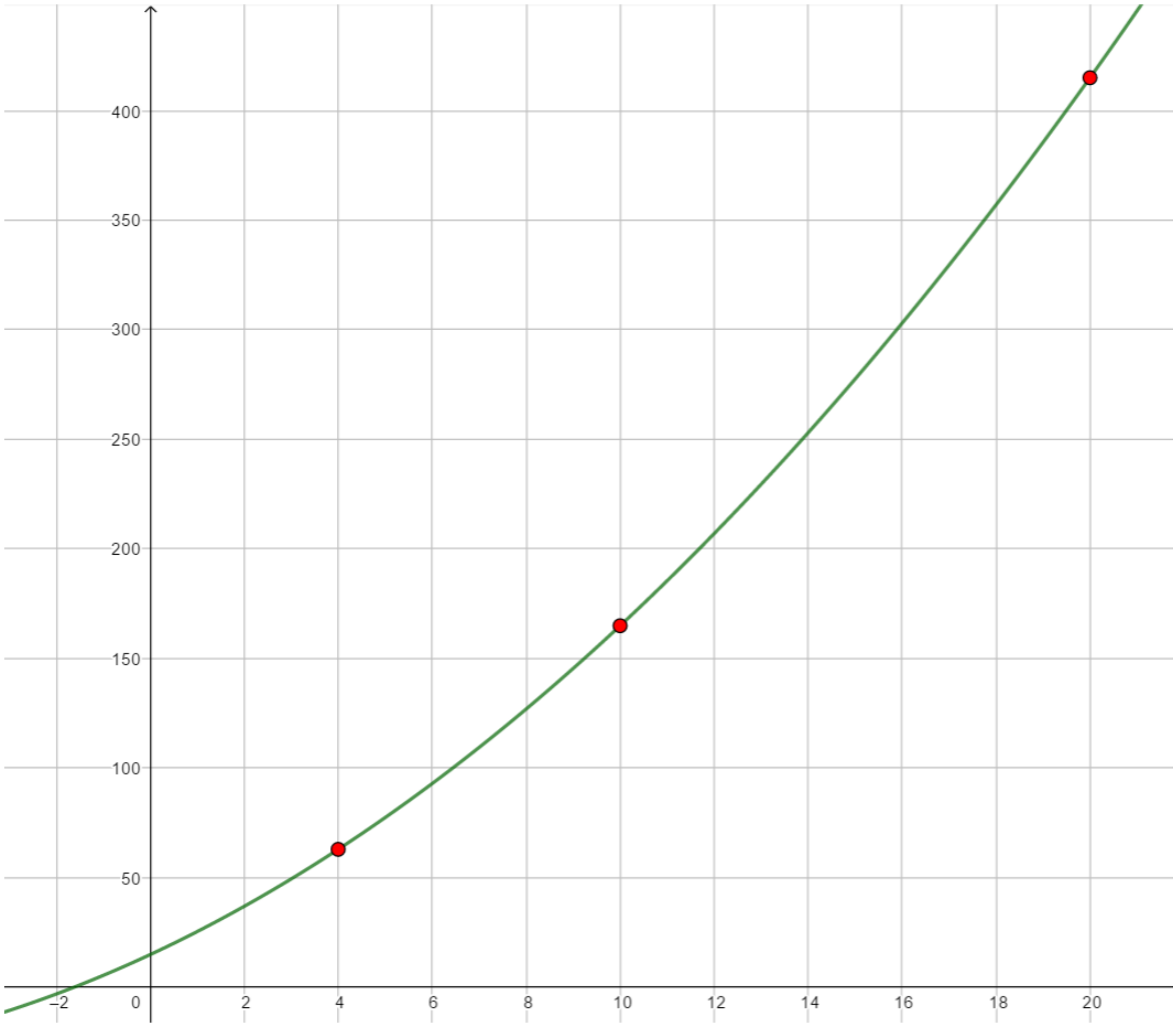
Par conséquent :

$$\begin{cases} a & = 0,5 \\ b & = 10 \\ c & = 15 \end{cases}$$

En déduire une expression de $C(x)$.
On trouve donc :

$$C(x) = 0,5x^2 + 10x + 15$$

En traçant la fonction $x \mapsto 0,5x^2 + 10x + 15$, on retrouve bien le fait que les trois points du système de la question **1.** appartiennent à la courbe :



4. Déterminer alors le coût de fabrication de 30 000 objets.
Il s'agit tout simplement de calculer $C(30)$. On a $C(30) = 765$.
Ainsi, le coût de fabrication de 30 000 objets est de 765 000 €.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice N, carrée d'ordre 3, telle que $A = I_3 + N$[1].

Il suffit de remarque que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $A = I_3 + N$.

2. Montrer que $N^3 = 0$. On pourra utiliser une calculatrice ou un logiciel.

```
>>> from numpy import *
>>> from numpy.linalg import *

>>> N=array([[0,-1,1],[0,0,2],[0,0,0]])

>>> dot(N,dot(N,N))
array([[0, 0, 0],
       [0, 0, 0],
       [0, 0, 0]])
```

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$$

Enoncé : Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$$

Démonstration :

• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = I + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$ ».

• Initialisation : Soit $n = 1$.
D'une part, $A^1 = A$ (par définition).
D'autre part, $I + 1 \times N + \dfrac{1 \times (1-1)}{2}N^2 = I + N = A$ (d'après la question **1.**)
On a donc bien montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel k ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: $A^k = I + kN + \dfrac{k(k-1)}{2}N^2$ ».
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \ : \ « \ A^{k+1} = I + (k+1)N + \frac{k(k+1)}{2}N^2 \ »$$

1. Cette décomposition est un cas particulier de la décomposition de Dunford et permet de calculer plus facilement des puissances de matrices comme le montre la question **3.**

• Hérédité :

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \times A \\
&= \left(I + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2\right) \times (I+N) \\
&= I + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2 + N + kN^2 + \frac{k(k-1)}{2}N^3 \\
&= I + (k+1)N + \frac{k(k-1)}{2}N^2 + \frac{2k}{2}N^2 + \frac{k(k-1)}{2}\underbrace{N^3}_{=0} \\
&= I + (k+1)N + \frac{k^2-k+2k}{2}N^2 \\
&= I + (k+1)N + \frac{k^2+k}{2}N^2 \\
&= I + (k+1)N + \frac{k(k+1)}{2}N^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

• Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = I + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$.

Remarque
Cette relation est encore vraie pour $n = 0$.

Exercice 3

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A \times B$ et $A \times C$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. En déduire que A n'est pas inversible.
Supposons, par l'absurde, qu'il existe une matrice inverse pour A. Notons la A^{-1}.
D'après la question précédente, on a $A \times B = A \times C$. Par suite,

$$\begin{aligned}
A \times B = A \times C &\Leftrightarrow A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times A \times C \\
&\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \times A}_{I_n} \times B = \underbrace{A^{-1} \times A}_{I_n} \times C \\
&\Leftrightarrow I_n \times B = I_n \times C \\
&\Leftrightarrow B = C
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde puisque $B \neq C$. Par conséquent, A n'est pas inversible.

Exercice 4

On considère les instructions suivantes écrites dans un éditeur Python.

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A=array([[3,-2,1],[-1,1,-2],[2,-2,3]])
B=array([[17],[-12],[20]])

X=dot(inv(A),B)
```

1. En utilisant les éléments de la copie d'écran ci-dessus, déterminer le système que ces instructions permettent de résoudre.

Cet algorithme permet de résoudre le système suivant :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z & = 17 \\ -x + y - 2z & = -12 \\ 2x - 2y + 3z & = 20 \end{cases}$$

2. Quelle est la taille de la matrice X ?

X est une matrice de taille 3×1.

3. Quelles valeurs contient la variable X après exécution de ces insctructions ?

```
>>> from numpy import *
>>> from numpy.linalg import *

>>> A=array([[3,-2,1],[-1,1,-2],[2,-2,3]])
>>> B=array([[17],[-12],[20]])

>>> X=dot(inv(A),B)
array([[5.],
       [1.],
       [4.]])
```