Corrigé - Corvée n°2

Limites de suites
Terminale Mathématiques complémentaires

A rendre le : 00/00/2020

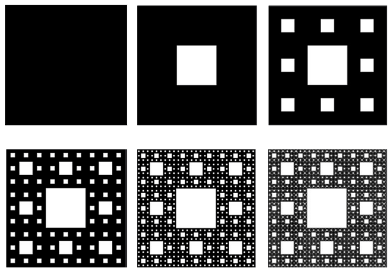
Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« *Si vous parlez à Dieu, vous êtes croyant. S'il vous répond, c'est que vous êtes schyzo.* »
Gregory House, *Docteur House* (2004).

Exercice 1

On va s'intéresser à une très célèbre et jolie figure géométrique : le tapis de Sierpiński.
On considère un carré dont l'aire est de 1 m^2. Pour construire la figure ci-dessous, on partage ce carré en neuf carrés égaux et on colorie en blanc celui du centre.
On partage ensuite chacun des huits carrés restants en neuf carrés égaux et on colorie en blanc les huits au centre.
On recommence cette construction à chaque étape. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_1 l'aire totale coloriée en blanc après la n-ième étape. On a donc $A_1 = \frac{1}{9}$.



Tapis de Sierpiński, de l'étape 0 *à* 5

1.a. Quelle proportion de la surface noire restante est coloriée en blanc à chaque étape ?
A chaque étape, on colorie en blanc $\frac{1}{9}$ème (un neuvième) de la surface noire restante.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

Puisque A_n est l'aire de la surface totale coloriée après n étapes, à l'étape $n+1$, on colorie $\frac{1}{9}$ de la partie non coloriée, soit $\frac{1}{9}(1-A_n)$ que l'on doit ajouter à A_n l'aire déjà coloriée. D'où

$$A_{n+1} = \frac{1}{9}(1-A_n) + A_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}A_n + A_n = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$.
a. Montrer que la suite (B_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Pour montrer que (B_n) est une suite géométrique, on montre qu'il existe une constante q (la raison de la suite...) telle que $B_{n+1} = qB_n$. Allons-y !

$$\begin{aligned} B_{n+1} = A_{n+1} - 1 &= \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - 1 \\ &= \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - \frac{9}{9} \\ &= \frac{8}{9}A_n - \frac{8}{9} \\ &= \frac{8}{9}(A_n - 1) = \frac{8}{9}B_n \end{aligned}$$

Par conséquent, (B_n) est une suite géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$
b. Exprimer B_n en fonction de n.

Rappel
On rappelle que pour (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Mais, comme ici, il se peut que l'on n'ait pas le premier terme v_0 lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne v_n à partir d'un terme différent de v_0 :

Soit (v_n) une suite géométrique non nulle de raison $q \neq 0$, alors, pour tous entiers n et p,

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Puisque (B_n) est une suite géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = -\frac{8}{9}$, on a donc

$$B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

c. Exprimer alors A_n en fonction de n.
Puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$, on a

$$A_n = B_n + 1 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.
Puisque $\frac{8}{9} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$, par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = 1$$

Remarque
Ce dernier résultat nous dit que l'aire de la partie coloriée en blanc tend vers 1. C'est à dire qu'à l'infini, le carré disparait...

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$.
Voici la fonction `Seuil` ci-contre, écrire en langage Python.

```
def Seuil(m):
    n=0
    u=0
    while u<m:
        u=4*u+3
        n=n+1
    return n
```

1. Quelle est le rôle de la fonction `Seuil` ?
La fonction `Seuil` renvoie le plus grand rang de la suite (u_n) tel $u_n < m$.

2. Saisir et exécuter ce programme pour :

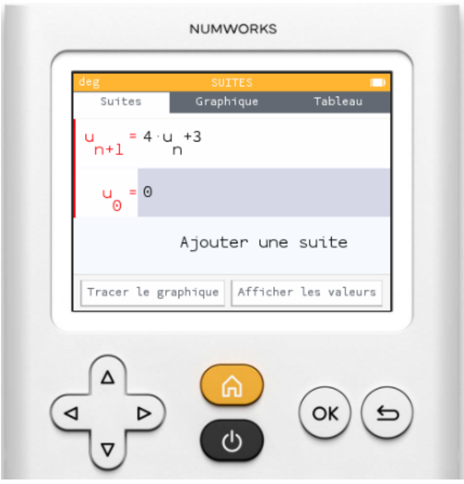
• $m = 1000$

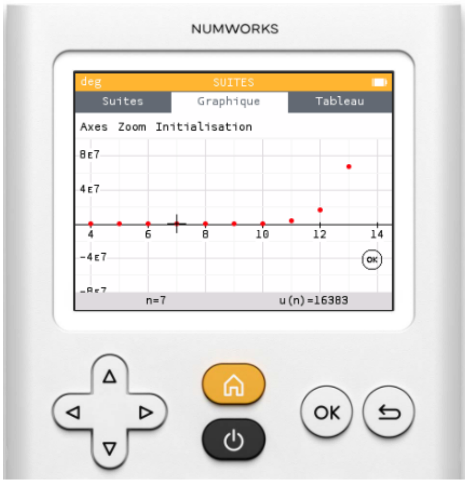
```
def Seuil(m):
    n=0
    u=0
    while u<m:
        u=4*u+3
        n=n+1
    return n

>>>Seuil(1000)
5
```

• $m = 100000$

```
def Seuil(m):
    n=0
    u=0
    while u<m:
        u=4*u+3
        n=n+1
    return n

>>>Seuil(100000)
9
```

3. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
On peut, par cet algorithme dire que la suite tend vers $+\infty$. Mais on peut visualiser ça à la calculatrice également. Je vous renvoie à la section *6 Programmer des suites sur calculatrice et en Python, 6.1 Sur la calculatrice* pour les détails de la marche à suivre :





Exercice 3

Dans une population d'abeilles, on dénombre 6 000 individus l'année 0. Chaque année, 25% de ces abeilles disparaissent et on introduit dans la population 3 000 abeilles supplémentaires.
On note u_n le nombre d'insectes vivants l'année n et u_n est exprimé en millier.

1. Justifier que $u_0 = 6$.
Comme on a 6 000 individus pour l'année 0, et que u_n est exprimé en millier, on a donc bien $u_0 = 6$.

2. Calculer u_1. Combien y a-t-il d'abeilles l'année 1 ?

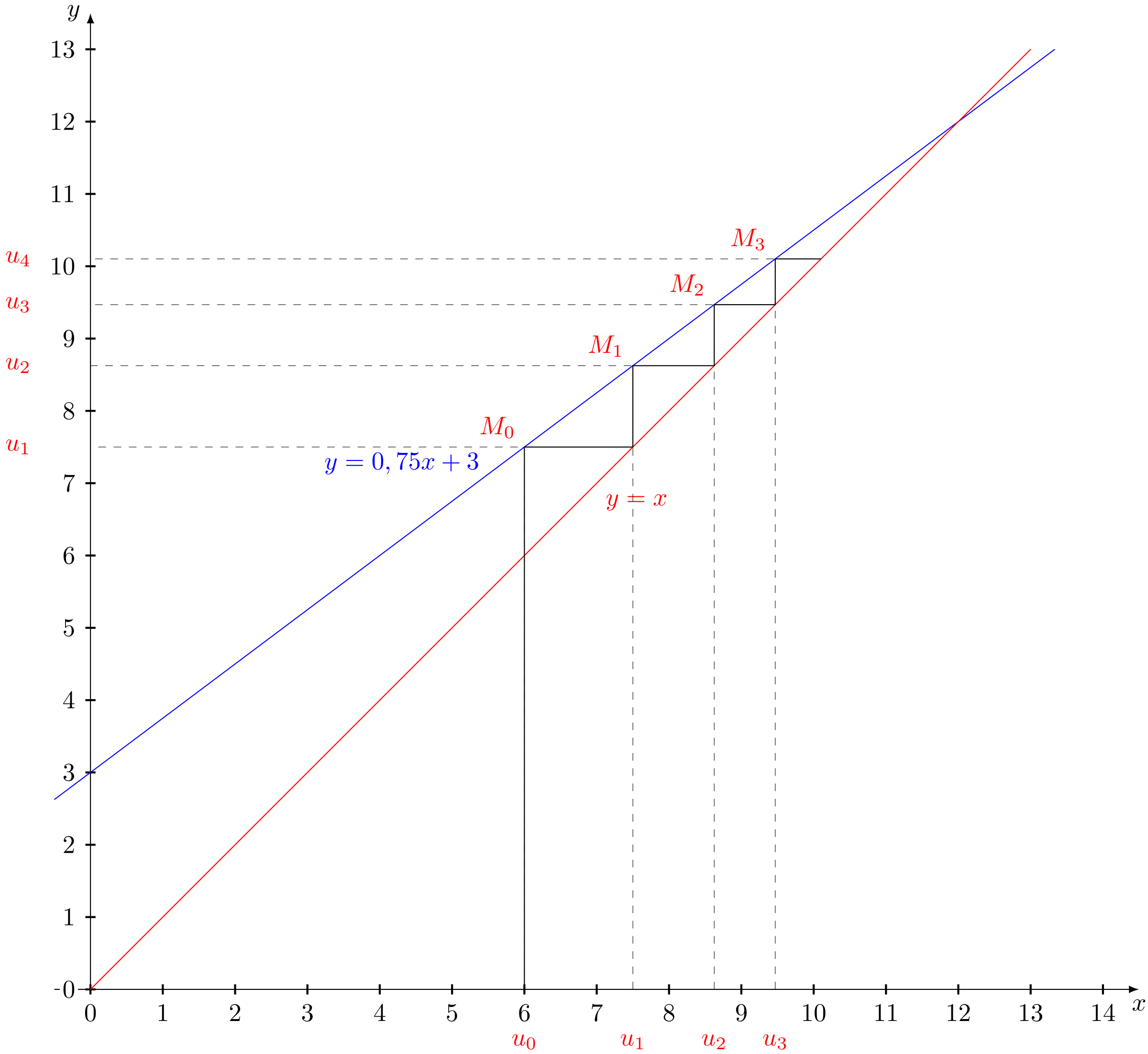
On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{25}{100}\right) u_0 + 3 \\ &= (1 - 0,25) \times 6 + 3 \\ &= 0,75 \times 6 + 3 \\ &= 4,5 + 3 = 7,5 \end{aligned}$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,75u_n + 3$.
Finalement, le calcul est le même que précédemment :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{25}{100}\right) u_n + 3 = (1 - 0,25)\, u_n + 3 = 0,75u_n + 3$$

4.a. Reproduire le graphique ci-contre et représenter avec précision les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite.



b. Emettre une conjecture sur le sens de variation de la suite.
D'après la lecture graphique, la suite semble croissante.

c. Expliquer pourquoi le graphique permet de conjecturer qu'il existe un plus petit nombre réel M tek que $u_n \leqslant M$.
D'après la lecture graphique, on remarque les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,75x + 3$ sont sécantes. Ainsi, au vue de la construction graphique, les valeurs des termes de la suite ne dépasseront jamais l'abscisse (ou l'ordonnée) du point d'intersection. On peut appeler M cette valeur.

Déterminer graphiquement ce nombre M.
D'après la lecture graphique, $M = 12$.

Quelle interprétation peut-on faire de ce nombre M ?
D'après la construction graphique des termes de la suite (u_n), M est la limite de la suite (u_n). Dans le contexte de l'énoncé, cela veut dire que la population d'abeilles tend vers 12 000 individus.