Rattrapage du Calvaire II

Limites de suites

Terminale Spécialité Mathématiques

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

> *« Lorsque le dernier arbre aura été coupé, le dernier poisson pêché et la dernière rivière polluée ; quand respirer l'air sera écoeurant, vous vous rendrez compte, trop tard, que la richesse n'est pas dans les comptes bancaires et que vous ne pouvez pas manger de l'argent. »*
>
> Alanis Obomsawin.

I - Etude classique d'une suite

Exercice 1 $\simeq 30$ minutes

Calculer - Raisonner

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1.a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.
b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
c. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
d. En déduire l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

II - QCM

Exercice 2 $\simeq 30$ minutes

Chercher - Calculer

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. **Une justification est demandée à chaque question !**
Chaque réponse exacte rapporte $0,5$ point, chaque réponse fausse enlève $0,25$ point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barême, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

$$\textbf{a.}\ \left(\frac{2^n}{n^{2020}}\right)_{n>0} \quad \textbf{b.}\ \left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textbf{c.}\ \left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$$

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.

Alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.
b. La suite (u_n) est minorée.
c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.
d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 1,5 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x-1$.
b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.
c. La suite (v_n) est majorée.
d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.
b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.
c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.