Calvaire II

Limites de suites

Terminale Spécialité Mathématiques

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« *Yibambe !* »

Black Panther, *Black Panther*, 2018.

I - Suites géométriques

Exercice 1 $\simeq$ 10 minutes

Calculer

Une ville comptait 25 000 habitants en 2019. On suppose que cette population diminue chaque année de 1%. On note p_n la population de cette ville en $2019 + n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire que (p_n) est une suite géométrique.
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de (p_n) et l'interpréter.

II - Limites simples de suites

Exercice 3 $\simeq$ 10 minutes

Calculer - Raisonner

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{11n + 4\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 5}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \dfrac{5}{n}}$$

2. Etudier alors la limite de la suite (v_n)

Exercice 4 $\simeq$ 10 minutes

Calculer - Raisonner

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1 + 2\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 3}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 5

≃ 10 minutes
Calculer - Raisonner

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n+\cos n}{n^2+4}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{n-1}{n^2+4} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+4}$$

2. Pour tout n, on pose $u_n = \dfrac{n-1}{n^2+4}$ et $w_n = \dfrac{n+1}{n^2+4}$.
Déterminer les limites de ces deux suites en factorisant.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n) avec le théorème des gendarmes et conclure.

Exercice 6

≃ 10 minutes
Calculer - Raisonner

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+(-1)^n n}{n^2+6}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Bonus

Exercise
Let the function f defined for all integer m by $f(m) = m^2 + m + 41$.
Prove or disprove the following assertion :

« *For all integer m, $f(m)$ is a prime number.* »