Calvaire II - Corrigé

Limites de suites

Terminale Spécialité Mathématiques

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Yibambe ! »

Black Panther, *Black Panther*, 2018.

I - Suites géométriques

Exercice 1 $\simeq$ 10 minutes

Calculer

Une ville comptait 25 000 habitants en 2019. On suppose que cette population diminue chaque année de 1%. On note p_n la population de cette ville en $2019 + n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
Comme la population diminue de 1% chaque année, cela correspond à un coefficient multiplicateur de

$$1 - \frac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$$

Par conséquent, $p_{n+1} = 0,99p_n$.

2. En déduire que (p_n) est une suite géométrique.
La relation entre p_{n+1} et p_n et bien de la forme $p_{n+1} = q \times p_n$ avec $q = 0,99$.
Donc (p_n) est une suite géométrique.

3. Exprimer p_n en fonction de n.
Comme (p_n) est une suite géométrique, on en déduit donc, d'après le cours, que

$$p_n = p_0 \times q^n$$

avec $p_0 = 25\ 000$ et $q = 0,99$. Ainsi,

$$p_n = 25\ 000 \times 0,99^n$$

4. En déduire la limite de (p_n) et l'interpréter.
Comme $q = 0,99 < 1$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.
Cela veut dire qu'à long terme, la population de la ville va s'éteindre...

II - Limites simples de suites

Exercice 3 $\simeq$ 10 minutes

Calculer - Raisonner

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{11n + 4\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 5}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \dfrac{5}{n}}$.

Il s'agit (tout simplement) de mettre n en facteur dans l'expression initiale de v_n et de se rappeler que $\sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$:

$$v_n = \frac{11n + 4\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 5} = \frac{n\left(11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(\sqrt{n} + \dfrac{5}{n}\right)} = \frac{\cancel{n}\left(11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{n} + \dfrac{5}{n}\right)} = \frac{11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \dfrac{5}{n}}$$

Remarque

Vous pourriez avoir encore un doute pour le terme en $4\sqrt{n}$... Mais regardez bien :

$$n \times \frac{4}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \times \sqrt{n} \times \frac{4}{\sqrt{n}} = \cancel{\sqrt{n}} \times \sqrt{n} \times \frac{4}{\cancel{\sqrt{n}}} = 4\sqrt{n}$$

2. Etudier alors la limite de la suite (v_n)

D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} 11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 11$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} + \dfrac{5}{n} = +\infty$ par sommes de limites car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc par quotient de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

Exercice 4 $\simeq$ 10 minutes

Calculer - Raisonner

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1 + 2\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 3}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

En calculant la limite au numérateur et au dénominateur, on trouve respectivement $+\infty$ et finalement on se retrouve avec la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$...

Comme expliqué dans le cours, la technique consiste à mettre les termes dominants en facteurs (ici ce sont e^n) :

$$u_n = \frac{1 + 2\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 3} = \frac{\mathrm{e}^n\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} + 2\right)}{\mathrm{e}^n\left(1 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^n}\right)} = \frac{\cancel{\mathrm{e}^n}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} + 2\right)}{\cancel{\mathrm{e}^n}\left(1 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^n}\right)} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} + 2}{1 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^n}}$$

D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} + 2 = 2$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^n} = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{\mathrm{e}^n} = 0$

Donc par quotient de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

III - Limites et comparaison

Exercice 5 $\simeq$ 10 minutes

Calculer - Raisonner

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n+\cos n}{n^2+4}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{n-1}{n^2+4} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+4}$$

Pour tout entier naturel n, on a

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-1 \leqslant n+\cos(n) \leqslant n+1$$

Or, comme la quantité n^2+4 est positive, donc, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{n-1}{n^2+4} \leqslant \frac{n+\cos n}{n^2+4} \leqslant \frac{n+1}{n^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n^2+4} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+4}$$

2. Pour tout n, on pose $u_n = \dfrac{n-1}{n^2+4}$ et $w_n = \dfrac{n+1}{n^2+4}$.

Déterminer les limites de ces deux suites en factorisant.

En calculant la limite au numérateur et au dénominateur, on trouve respectivement $+\infty$ et finalement on se retrouve avec la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$...

Comme précédemment, la technique consiste à mettre les termes dominants en facteurs (ici ce sont n au numérateur et n^4 au dénominateur :

$$u_n = \frac{n-1}{n^2+4} = \frac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{\cancel{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n^{\cancel{2}}\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{1-\dfrac{1}{n}}{n\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)}$$

Premièrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = 1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Deuxièment, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{4}{n^2} = 1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$

Troisièmement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{4}{n^2}\right) = +\infty$ par produit de limites.

Donc par quotient de limites, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

> *Remarque*
> La méthode est exactement la même pour w_n, et on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n) avec le théorème des gendarmes et conclure.

Comme cela est dit dans l'énoncé, on applique le théorème des gendarmes.

En effet, on a trois suites telles que,

$$\text{pour tout entier } n, \quad v_n \leq u_n \leq w_n\ .$$

Avec, de plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 6

$\simeq$ 10 minutes

Calculer - Raisonner

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+(-1)^n n}{n^2+6}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Dans cet exercice, on va utiliser le théorème des gendarmes. On peut avoir ce *feeling* en remarquant le $(-1)^n$ que l'on sait encadrer...

Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -n \leqslant (-1)^n n \leqslant n \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 - n \leqslant n^2 + (-1)^n n \leqslant n^2 + n \end{aligned}$$

Or, comme la quantité n^2+6 est positive, donc, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{n^2-n}{n^2+6} \leqslant \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+6} \leqslant \frac{n^2+n}{n^2+6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2-n}{n^2+6} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2+n}{n^2+6}$$

Comme précédemment, on va calculer la limites des deux suites de part et d'autre de l'inégalité.
En calculant la limite au numérateur et au dénominateur, on trouve respectivement $+\infty$ et finalement on se retrouve avec la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$...
La technique consiste (encore et toujours) à mettre les termes dominants en facteurs (ici ce sont n^2) :

$$\frac{n^2-n}{n^2+6} = \frac{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{6}{n^2}\right)} = \frac{\cancel{n^2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\dfrac{6}{n^2}\right)} = \frac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{6}{n^2}}$$

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{6}{n^2} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n^2} = 0$

Donc par quotient de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n}{n^2+6} = 1$.

Remarque

Comme ci-dessus, la méthode est exactement la même pour $\dfrac{n^2+n}{n^2+6}$, et on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+6} = 1$.

On a trois suites (que l'on peut appeler (u_n), (v_n) et (w_n)) telles que,

$$\text{pour tout entier } n, \quad v_n \leq u_n \leq w_n \ .$$

Avec, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Bonus

Exercise
Let the function f defined for all integer m by $f(m) = m^2+m+41$.
Prove or disprove the following assertion :

« *For all integer m, $f(m)$ is a prime number.* »

$\forall\ m \in [\![0;39]\!]$, $f(m)$ is a prime number but $f(40) = 41^2$ and $f(41) = 41 \times 43$.