Suites numériques - Première

Mohamed NASSIRI

1 Modélisation par une suite numérique

Définition 1 *Une* **suite numérique** *est une liste de nombres réels, ordonnée, et indéxée par les entiers naturels (ou numérotée).*

Exemples

a. $1; 2; 3; 4; 5; \dots$
b. $2; 4; 6; 8; 10; \dots$
c. $3; 7; 11; 15; 19; \dots$
d. $2; 4; 8; 16; 32; \dots$
e. $2; 3; 5; 9; 17; \dots$
f. $0; 1; 8; 27; 64; 125; \dots$
g. $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots$

Définition 2
• *Une suite u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*
• *Une suite u est donc un procédé qui à tout entier n associe le nombre $u(n)$.*
• *On note en général u_n le* **terme d'indice n** *au lieu de $u(n)$, et la suite est notée (u_n), ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de u.*
• *u_n est* ***un*** *nombre de la suite, et (u_n) désigne* ***l'ensemble de tous les nombres*** *de la suite.*

Exemple

Par exemple, avec la dernière suite de l'exercice précédent, on note u ou (u_n) la suite, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de la suite :

$$u = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots\}$$

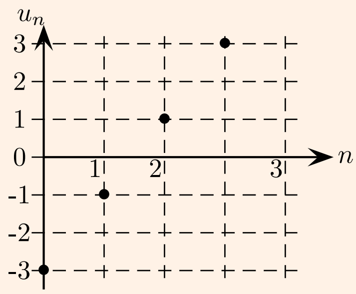
On a, par exemple, en commençant à compter à 0 :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \dots, \quad u_6 = 8, \quad \dots$$

Exercice. Calculer

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors $u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$ ...

$u_{20} =$ ...
$u_{50} =$ ...
$u_{5250} =$ ...

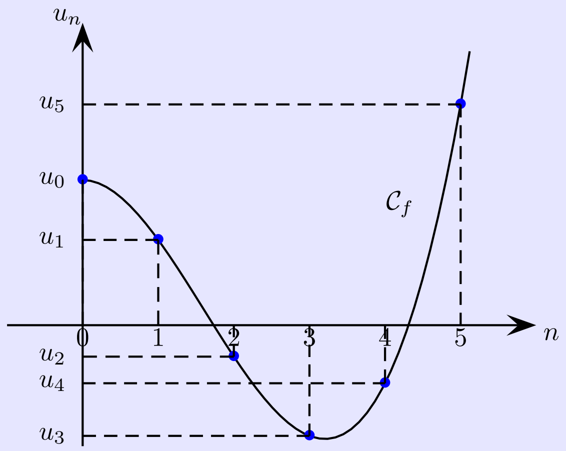


Remarque

On peut définir une suite de deux façons : **explicitement** ou **par récurrence** (ou implicitement).

• **Explicitement :** à partir d'une fonction f : le terme général de la suite est alors $u_n = f(n)$.
On parle aussi d'**échantillonnage** : la suite (u_n) est constituée d'échantillons de la fonction f :

$$u_0 = f(0)\ ;\ u_1 = f(1)\ ;\ u_2 = f(2)\ ;\ \dots$$



• **Par récurrence**, ou implicitement : comme chaque terme de la suite est numéroté, chaque terme a un prédécesseur et un successeur ; on peut donc définir une suite en indiquant son premier terme u_0 et une relation permettant de connaître un terme connaissant son (ou ses) prédecesseur.
Par exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Alors, $u_1 = u_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$, $u_3 = u_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$, ...

Exemple

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04u_n \end{cases}$.

Alors,
$u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,
$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \dots$

$u_{50} = 1,04 \times u_{49}\ \dots$

Exercice. Calculer

Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2 - 1}{v_n^2 + 2}$.

Visionner la notion

• Calculer les premiers termes d'une suite - Première - m@ths et tiques
• Représenter graphiquement une suite - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°40 page 32. *Calculer.*

Exercice n°41 page 32. *Modéliser* **Tableur**.

Exercice n°42 page 32. *Modéliser* **Algo**.

Exercice n°43 page 42. *Calculer.*

Exercice n°44 page 43. *Calculer.*

Exercice n°45 page 43. *Calculer* ♣.

Exercice n°46 page 43. *Modéliser* **Tableur**.

Exercice n°47 page 43. *Modéliser* **Algo**.

Exercice n°48 page 43. *Calculer.*

2 Sens de variation d'une suite

Définition 3

- *Une suite* (u_n) *est* **croissante** *si pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- *Une suite* (u_n) *est* **décroissante** *si pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- *Une suite* (u_n) *est* **constante** *si pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = u_n$.
- *Une suite croissante ou décroissante est dite* **monotone**.

Méthode

Etudier le sens de variation d'une suite (u_n) revient donc à comparer, **pour tout entier** n, les termes consécutifs u_{n+1} et u_n. On peut :
- soit étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
- soit étudier le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Exercice. Calculer

Etudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a) $u_n = n^2 - n + 2$ b) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ c) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ d) $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$

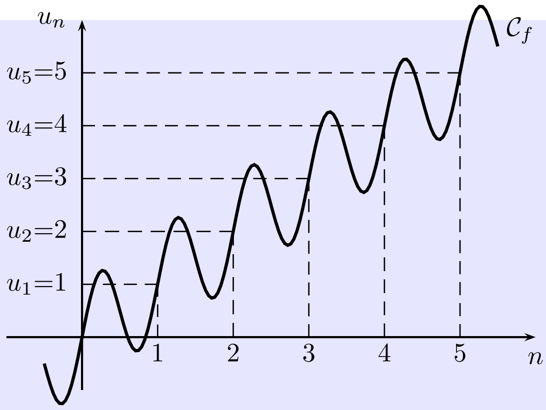
e) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - n$ f) $u_n = (n-5)^2$

g) $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ h) $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$ i) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$

Proposition 4 *Soit* (u_n) *la suite définie* **explicitement** *par* $u_n = f(n)$, *où* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$, *alors* (u_n) *et* f *ont le même sens de variation :*
- *si* f *est croissante, alors la suite* (u_n) *est croissante,*
- *si* f *est décroissante, alors la suite* (u_n) *est décroissante.*

Attention !

La réciproque est fausse ! Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.
Alors, pour tout entier n, $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$, et donc (u_n) est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



Exemple

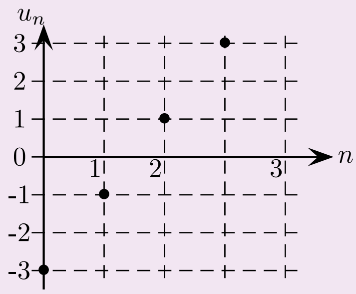
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$.
Cette suite est croissante puisque :

• **Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) - 3 - (2n-3) \\ &= 2n + 2 - 3 - 2n + 3 \\ &= 2 \geq 0 \end{aligned}$$

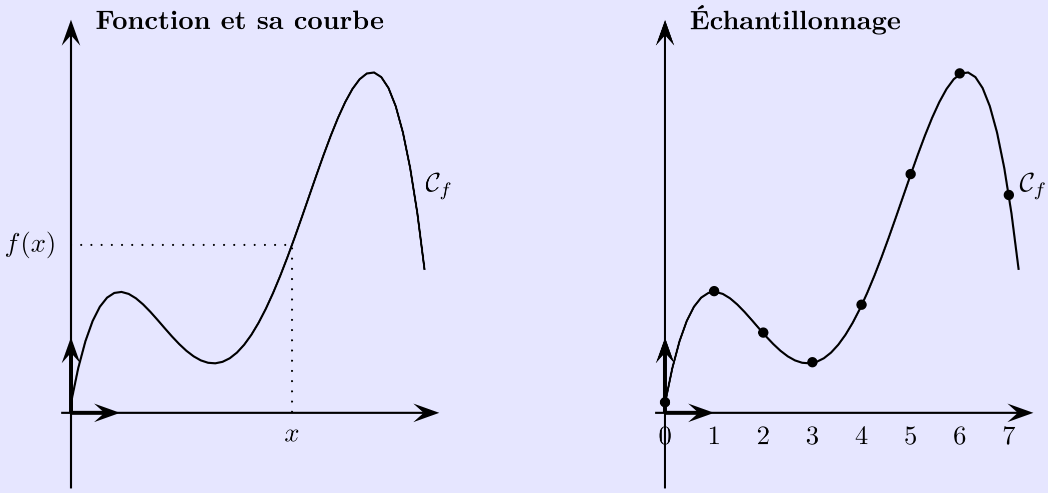
Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

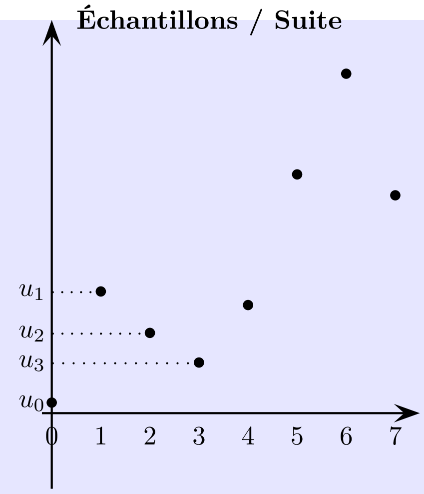
• **Méthode 2 :**
La fonction affine $f(x) = 2x - 3$ est croissante (car son coefficient directeur, 2, est positif). Comme $u_n = f(n)$, alors la suite (u_n) est croissante.



Remarque

Quand on écrit $u_n = f(n)$, on ne considère que les images de f pour des valeurs entières, et non pas pour tous les nombres réels d'un intervalle : on dit alors qu'on **échantillonne**, ou qu'on **numérise**, la fonction f.





Exercice. Chercher - Calculer

Etudier (de deux manières différentes !) le sens de variation des suites définies par :

$a) u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ $\quad b) u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ $\quad c) u_n = (n-5)^2$ $\quad d) u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n+1}$

Visionner la notion

- Etudier la variation d'une suite (1) - Première - m@ths et tiques
- Etudier la variation d'une suite (2) - Première - m@ths et tiques
- Etudier la variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°49 page 33. *Calculer.*

Exercice n°53 page 34. *Calculer.*

Exercice n°52 page 34. *Chercher* ♣.

3 Suites particulières

3.1 Suites arithmétiques

Définition 5 *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
Pour tout entier n,

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$$

Remarque

On peut visualiser les suites arithmétiques de la sorte :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \dots$$

Exemple

La suite de entiers naturels pairs 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... est la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$.

Proposition 6 *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*
- Si $r > 0$, (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, (u_n) est décroissante.

Proposition 7 *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n,*

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque

Il se peut que l'on n'ait pas le premier terme u_0 lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne u_n à partir d'un terme différent de u_0 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors, quels que soient les entiers m et p,

$$u_n = (n-p)r + u_p$$

Exercice. Calculer

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$.
Alors,
$u_1 = \ \dots$
$u_2 = \ \dots$
$u_3 = \ \dots$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \dots$.

2. Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.
Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \dots$.
On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \quad \dots$

3. La suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

Visionner la notion

- Suites arithmétiques - Définition - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Suites arithmétiques - Méthode - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Déterminer l'expression générale d'une suite arithmétique - Première - m@ths et tiques
- Démontrer qu'une suite est arithmétique - Première - m@ths et tiques
- Déterminer une suite arithmétique - Première - m@ths et tiques
- Etudier la variation d'une suite arithmétique - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

- Exercice n°54 page 34. *Calculer.*
- Exercice n°55 page 34. *Calculer* .
- Exercice n°56 page 34. *Calculer.*
- Exercice n°57 page 34. *Calculer* ♣.
- Exercice n°58 page 34. *Représenter.*
- Exercice n°59 page 34. *Modéliser.*
- Exercice n°65 page 35. *Chercher.*
- Exercice n°66 page 35. *Représenter* **Tableur**.

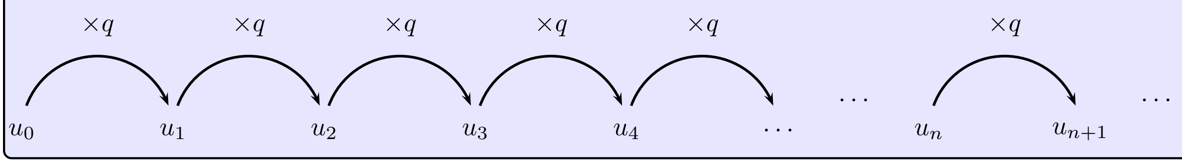
3.2 Suites géométriques

Définition 8 *Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q, appelée* **raison** *de la suite, le terme précédent.*
Pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Remarque

On peut visualiser les suites arithmétiques de la sorte :



Exemple

• La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, …des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
• La suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, …est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

Proposition 9 *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.*
- Si $q > 1$, (u_n) est croissante.
- Si $q < 1$, (u_n) est décroissante.

Proposition 10 *Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n,*

$$v_n = v_0 \times q^n$$

.

Remarque

Encore une fois, il se peut que l'on n'ait pas le premier terme u_0 lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne u_n à partir d'un terme différent de u_0 :

Soit (u_n) une suite géométrique non nulle de raison $q \neq 0$, alors, pour tous entiers m et p,

$$\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$$

Exercice. Calculer

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Cette suite est-elle géométrique ?

Visionner la notion

- Suites géométriques - Définition - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Suites géométriques - Méthode - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Reconnaitre une suite arithmétique et une suite géométrique - Première - m@ths et tiques
- Déterminer l'expression générale d'une suite géométrique - Première - m@ths et tiques
- Démontrer qu'une suite est géométrique - Première - m@ths et tiques
- Déterminer une suite géométrique - Première - m@ths et tiques
- Etudier la variation d'une suite géométrique - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°69 page 36. *Calculer.*

Exercice n°70 page 36. *Calculer.*

Exercice n°71 page 36. *Calculer.*

Exercice n°77 page 37. *Chercher.*

Exercice n°78 page 37. *Calculer.*

Exercice n°79 page 37. *Modéliser* **Tableur**.

4 Sommes des termes dune suite

Proposition 11

- *La somme des n premiers entiers naturels est :*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- *Pour tout réel* $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque

Pour $q = 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$.

Proposition 12
• *La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes :*

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}$$

• *La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme v_0 et de raison q est :*

$$v_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercice. Calculer

Calculer les sommes :

a) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$ b) $P = 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 121$ c) $Q = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$

Visionner la notion

• Sommes de termes de suites - Formules - Maths 1ère - Les Bons Profs
• Sommes de termes de suites - Applications - Maths 1ère - Les Bons Profs
• Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique (1) - Première - m@ths et tiques
• Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique (2) - Première - m@ths et tiques
• Calculer la somme des termes d'une suite géométrique - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°60 page 34. *Calculer.*
Exercice n°61 page 35. *Calculer.*
Exercice n°62 page 35. *Calculer.*
Exercice n°63 page 35. *Calculer* ♣.
Exercice n°64 page 35. *Modéliser.*
Exercice n°72 page 36. *Calculer.*
Exercice n°73 page 36. *Calculer.*
Exercice n°74 page 36. *Modéliser* **Médecine**.
Exercice n°75 page 36. *Modéliser* ♣ **SNT**.
Exercice n°76 page 36. *Calculer* .