

Dérivation des fonctions - Première

Mohamed NASSIRI

1 Nombre dérivé en a d'une fonction

Définition 1

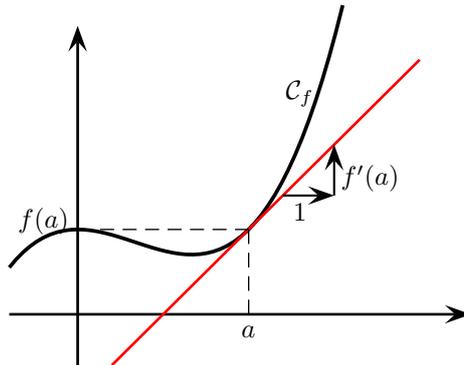
- On appelle **taux d'accroissement**, ou **taux de variation**, en a de la fonction f le nombre

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- On appelle **nombre dérivé en a** la limite, lorsqu'elle existe, de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0. On note ce nombre, lorsqu'il existe, $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .



💡 Exemple

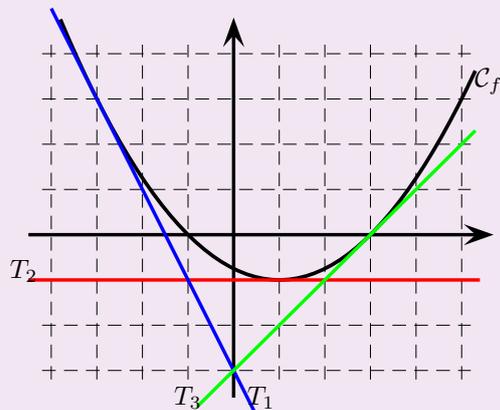
C_f est la courbe représentative d'une fonction f .
 T_1 , T_2 et T_3 sont les tangentes à C_f aux points d'abscisses respectives -3 , 1 et 3 .

Par conséquent, on a donc :

$$f'(-3) = -2$$

$$f'(1) = 0$$

$$f'(3) = 1$$





Exercice. Représenter - Calculer

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal \mathcal{C}_f et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$. Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.

2.a. Pour $h > 0$, on pose $m_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Compléter le tableau :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
m_h						

Vers quelle valeur tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?

b. Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f .



Visionner la notion

- [Le nombre dérivé - Dérivation - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)
- [Calculer le nombre dérivé \(1\) - Première - m@ths et tiques](#)
- [Calculer le nombre dérivé \(2\) - Première - m@ths et tiques](#)
- [Déterminer graphiquement le nombre dérivé - Première - m@ths et tiques](#) (début de la vidéo)



Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :



Exercice n°38 page 120. Calculer.



Exercice n°39 page 120. Calculer.



Exercice n°40 page 120. Calculer.



Exercice n°41 page 120. Calculer.



Exercice n°43 page 121. Calculer.



Exercice n°45 page 121. Chercher ♣.



Exercice n°46 page 121. Raisonner.



Exercice n°47 page 121. Chercher ♣.



Exercice n°50 page 122. Chercher.



Exercice n°52 page 122. Représenter.

2 Fonction dérivée

Définition 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **dérivable sur I** si f admet un nombre dérivé en tout point de I , c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.
- On appelle **fonction dérivée** de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

Proposition 3 Ce tableau est à apprendre par coeur !

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée	f est définie sur	f est dérivable sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}	
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	\mathbb{R}	
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}	

Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
u^n ($n \in \mathbb{N}$)	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

Composées de fonctions

Fonction	Dérivée
u^2	$2u'u$
u^n	$u'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$



Exercice corrigé - Calculer

Calculer les fonctions dérivées $f'(x)$ dans tous les cas suivants.

Écrire la fonction dérivée sous la forme la plus "simplifiée" possible : une seule fraction au plus (même dénominateur ...), et le plus factorisé possible.

$f_1(x) = x^3 - 5x^7 + \frac{3}{x}$	$f_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$	$f_3(x) = (x^2 + 3)x^5$	$f_4(x) = (3x - 2)^2$
$f_5(x) = x^2\sqrt{x}$	$f_6(x) = (x + 3)x^2\sqrt{x}$	$f_7(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)x$	$f_8(x) = \left(x + \frac{2}{x^2}\right)x$
$f_9(x) = \frac{3}{x+1}$	$f_{10}(x) = -2\frac{5}{x^2+3}$	$f_{11}(x) = \frac{5x}{x^2+3}$	$f_{12}(x) = \frac{x+2}{x+3}$
$f_{13}(x) = \frac{x^2+1}{x^3+1}$	$f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$	$f_{15}(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$	$f_{16}(x) = \frac{x^2 + \frac{3}{x}}{x^2 + \frac{3}{3}}$
$f_{17}(x) = \frac{5\sqrt{x}}{1 + \frac{x}{2}}$	$f_{18}(x) = x \frac{1 + \frac{1}{3}}{3 + \frac{x}{x}}$	$f_{19}(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$f_{20}(x) = \frac{1}{3}x \frac{3 + \frac{9}{x}}{x^2 + 2}$
$f'_1(x) = \frac{3x^4 - 35x^8 - 3}{x^2}$	$f'_2(x) = \frac{4x^3\sqrt{x} - 2\sqrt{3x} + 3}{2\sqrt{x}}$	$f'_3(x) = x^4(7x^2 + 15)$	
$f'_4(x) = 6(3x - 2)$	$f'_5(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$	$f'_6(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}(7x + 15)$	
$f'_7(x) = 2x$	$f'_8(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$	$f'_9(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$	
$f'_{10}(x) = \frac{20x}{(x^2+3)^2}$	$f'_{11}(x) = 5\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$	$f'_{12}(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$	
$f'_{13}(x) = \frac{-x(x^3+3x-2)}{(x^3+1)^2}$	$f'_{14}(x) = -3\frac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2}$	$f'_{15}(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$	
$f'_{16}(x) = 3\frac{x^3-27x-6}{x(3x^2+x)^2}$	$f'_{18}(x) = \frac{1}{3}$	$f'_{19}(x) = \frac{1}{x^2}$	
$f'_{17}(x) = \frac{5\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2}$			
$f'_{20}(x) = \frac{-x^2-6x+2}{(x^2+2)^2}$			



Visionner la notion

- [Dériver les fonctions usuelles - Première - m@ths et tiques](#)
- [Les dérivées usuelles - Dérivation - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)



Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :



Exercice n°74→86 page 126. *Calculer.*



Exercice n°89 page 127. *Calculer.*



Exercice n°87 page 126. *Calculer*



Exercice n°90 page 127. *Raisonner.*



Exercice n°88 page 126. *Calculer*



Exercice n°91 page 127. *Calculer.*

3 Sens de variation d'une fonction

Proposition 4 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

 **Remarque**

Lorsque l'on étudie les variations d'une fonction, on synthétise cette étude dans un **tableau de variations** comme dans l'exemple suivant.

 **Exemple**

Étudions les variations de la fonction suivante définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

- Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 3 \times x^2 - 3 \times 1 - 0 = 3x^2 - 3$$

- Détermination des "zéros" de la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$		

 **Remarque**

Il ne faut pas oublier de calculer les images des zéros de la dérivée par la fonction f (dans notre exemple, on a bien déterminé $f(-1)$ et $f(1)$)!

 **Méthode**

- Dériver la fonction à l'aide des formules usuelles
- Déterminer le(s) valeur(s) de x pour le(s)quelle(s) la dérivée s'annule.
- Déterminer le signe de la dérivée sur l'intervalle de définition.
- Associer les variations associées à chaque signe dans un tableau de variations.

 **Exercice. Calculer**

Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice précédent de a) à l) et des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ c) $f(x) = \frac{-2x + 1}{x + 1}$
 d) $f(x) = \frac{-2x + 1}{(x + 1)^2}$ e) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$



Visionner la notion

- [Signe de la dérivée et variations - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)
- [Etudier les variations d'une fonction - Première - m@ths et tiques](#)



Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :



Exercice n°29 page 144. *Chercher* ♣.



Exercice n°30 page 144. *Chercher*.



Exercice n°32 page 145. *Calculer* ♣.



Exercice n°33 page 145. *Représenter*.



Exercice n°35 page 145 *Représenter* ♣.



Exercice n°36 page 145. *Chercher*.



Exercice n°37 page 147. *Chercher*.



Exercice n°42→50 page 147 *Calculer*.



Exercice n°51 page 147. *Calculer*.



Exercice n°52 page 147. *Calculer*.



Exercice n°56 page 147. *Calculer* ♣.