Modéliser le hasard, calculer des probabilités

Mohamed NASSIRI

1 Modélisation d'une expérience aléatoire

1.1 Définitions

Définition 1
• *Une* **expérience aléatoire** *est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.*
• *Une* **issue** *est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
• *L'*__univers__ *associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note* Ω

A raconter au prochain repas de famille
• *Hasard* vient de l'arabe *az-zahr* qui signifie « jet de dé ».
• *Aléa* vient du latin *alea* qui signifie « coup de dé ».
• *Chance* vient du latin *cadere* qui signifie « choir, tomber ».

Exemple
On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le nombre obtenu.
Cette expérience a 6 issues possibles et l'univers associé est

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Méthode
• Pour chaque expérience, on s'intéresse à ce qui est étudié (valeur, couleur, etc.).
• Pour chaque expérience, on liste les différentes issues possibles sans en oublier et sans les répéter !

Exercice - Chercher
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.
Parmi ces boules, 5 sont rouges, 3 sont bleues et 2 sont vertes.
Dans chaque cas, déterminer l'univers associé à l'expérience aléatoire décrite.
1. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa valeur.
2. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

Visionner les notions
• Vocabulaire des probabilités - Maths seconde - Les Bons Profs

Pour s'entraîner
Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°7 page 305. *Chercher* ♣.
Exercice n°17 page 309. *Chercher*.
Exercice n°21 page 309. *Chercher*.
Exercice n°22 page 309. *Chercher*.
Exercice n°23 page 309. *Chercher* ♣.
Exercice n°24 page 309. *Chercher*.
Exercice n°37 page 310. *Communiquer*.
Exercice n°38 page 310. *Communiquer* ♣.
Exercice n°39 page 310. *Modéliser*.
Exercice n°40 page 311. *Communiquer*.
Exercice n°41 page 311. *Chercher*.

1.2 Loi de probabilité d'une expérience aléatoire

Définition 2 *Définir une* **loi de probabilité** *pour une expérience dont l'univers est* $\Omega = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ *consiste à attribuer à chacune des issues un nombre* p_i *positif ou nul, appelé* **probabilité**, *tel que* $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Remarque
Lorsque chaque issue a la même probabilité de se produire qu'une autre, on est dans une **situation d'équiprobabilité**.

Exemple

On lance un dé tétraédrique dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
Si le dé n'est pas truqué, on est dans une situation d'équiprobabilité. On obtient donc la loi de probabilité suivante

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

On peut également regrouper les résultats sous forme d'un tableau

	x_1 ↓	x_2 ↓	x_3 ↓	x_4 ↓
x_i	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	↑ p_1	↑ p_2	↑ p_3	↑ p_4

Méthode
- Pour chaque expérience, on s'intéresse à ce qui est étudié (valeur, couleur, etc.).
- Pour chaque expérience, on liste les différentes issues possibles sans en oublier et sans les répéter !
- On attribue une probabilité à chaque issue.
- Il est préférable de synthétiser le tout dans un tableau.

Exercice - Représenter

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.
Parmi ces boules, 5 sont rouges, 3 sont bleues et 2 sont vertes.
Dans chaque cas, déterminer la loi de probabilité associée à l'expérience aléatoire décrite.
1. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa valeur.
2. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

Proposition 3 (admise) *En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de prendre cette valeur comme probabilité de l'issue.*

Visionner les notions
- Loi de probabilité - Maths seconde - Les Bons Profs

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°12 page 305. *Raisonner* ♣.
Exercice n°13 page 305. *Raisonner*.
Exercice n°18 page 309. *Calculer*.
Exercice n°26 page 309. *Calculer* ♣.
Exercice n°47 page 311. *Communiquer*.
Exercice n°54 page 312. *Communiquer*.

2 Probabilité d'un événement

Définition 4
- *Un* **événement** *A est un sous-ensemble de Ω (ensemble des issues).*
- *Sa* **probabilité** *$p(A)$ est la somme des probabilités des issues favorables à A.*
- *Si $p(A) = 0$, l'événement A est dit* **impossible**.
- *Si $p(A) = 1$, l'événement A est dit* **certain**.

Remarque

Si A est un sous-ensemble de Ω, on le note $A \subset \Omega$.

Proposition 5 *$p(\varnothing) = 0$, $p(\Omega) = 1$ et, pour tout événement A, on a $0 \leq p(A) \leq 1$.*

Proposition 6 (admise) *Dans une* **situation d'équiprobabilité**, *la probabilité d'un événement A est*

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on note la carte obtenue.
Calculer les probabilités des événements :
1. A : « La carte est un valet. »
2. B : « La carte est un pique. »

Solutions :
Les 32 issues étant équiprobables (tirage au hasard), on a :
1. $p(A) = \dfrac{\text{nombre de valets}}{32} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$
2. $p(B) = \dfrac{\text{nombre de piques}}{32} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

Méthode

- Repérer si l'on est bien dans une situation d'équiprobabilité !
- Chercher les issues qui réalisent chacun des événements.
- Compter le nombres d'issues qui réalisent chacun des événements.
- Calculer la ou les probabilités grâce à la formule.

Exercice - Raisonner

TOM écrit au hasard dans un certain ordre les trois lettres de son prénom.
Quel est la probabilité qu'il ait écrit :
a. « TOM » ?
b. « MOT » ?
c. un mot commençant par T ?

Visionner les notions

- Dénombrer pour calculer une probabilité - Seconde - m@ths et tiques
- Calculer une probabilité - Troisième - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°48 page 311. *Raisonner* ♣.
Exercice n°51 page 312. *Chercher*.
Exercice n°52 page 312. *Chercher*.
Exercice n°53 page 312. *Chercher* ♣.
Exercice n°57 page 313. *Modéliser*.
Exercice n°61 page 314. *Calculer*.
Exercice n°63 page 314. *Chercher* ♣.
Exercice n°66 page 314. *Modéliser*.

3 Opérations sur les événements

3.1 Intersection et réunion d'événements

Définition 7 *Si A et B sont deux événements d'un univers Ω,*
- *$A \cap B$, **intersection** de A et B, est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B.*
- *$A \cup B$, **réunion** de A et B, est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **ou** B (au moins l'un des deux).*
- *Les événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.*

Remarque

Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cap B) = 0$.

Exemple

On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 »	$A = \{5; 6\}$
B « Obtenir un résultat pair »	$B = \{2; 4; 6\}$
A ET B « Obtenir un résultat pair ET strictement supérieur à 4 »	$A \cap B = \{6\}$
A OU B « Obtenir un résultat pair OU strictement supérieur à 4 »	$A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

Méthode

- Bien identifier les différents événements.
- Bien repérer si l'on a une intersection ou une réunion.

Exercice - Calculer

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes et on note la carte obtenue. On s'intéresse aux événements suivants :

A : « La carte est un valet. »

B : « La carte est un pique. »

1. Décrire en français les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ et déterminer leurs probabilités.

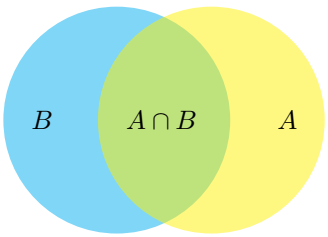
2. Déterminer $p(A \cap B)$.

Visionner la notion

- Intersection et réunion - Probabilités - Maths seconde - Les Bons Profs

Proposition 8 (admise) *Soit A et B deux événements. On a*

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$



Remarque

Cette formule est surtout utilisée pour calculer la réunion de deux événements.

Exemple

On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans

le tableau ci-dessous :

	Filles	**Garçons**	**Total**
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude. On considère les événements :
- A « L'adolescent choisi préfère les films d'action », et
- F « L'adolescent choisi est une fille ».

Calculer $p(A \cup F)$.

Solution :
On souhaite donc utiliser la formule

$$p(A \cup F) + p(A \cap F) = p(A) + p(F)$$

Pour cela, il faut donc déterminer $p(A)$, $p(F)$ et $p(A \cap F)$. Allons-y !

• Détermination de $p(A)$:

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'adolescents préférant les films d'action}}{180} = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$$

• Détermination de $p(F)$:

$$p(F) = \frac{\text{nombre de filles}}{180} = \frac{120}{180} = \frac{2}{3}$$

• Détermination de $p(A \cap F)$:

$$p(A \cap F) = \frac{\text{nombre de filles préférant les films d'action}}{180} = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$$

• Calcul de $p(A \cup F)$:

$$p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = \frac{80}{180} + \frac{120}{180} - \frac{45}{180} = \frac{155}{180} = \frac{31}{36}$$

Méthode
• Bien identifier les différents événements.
• Déterminer les probabilités grâce aux formules.

Exercice - Calculer
On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes et on note la carte obtenue. On s'intéresse aux événements suivants :
A : « La carte est un valet. »
B : « La carte est un pique. »
Calculer $p(A \cup B)$.

Visionner la notion
• Calculer la probabilité d'une réunion - Seconde - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°9 page 305. *Calculer* ♣.

Exercice n°14 page 305. *Calculer* ♣.

Exercice n°19 page 309. *Calculer.*

Exercice n°29 page 309. *Calculer.*

Exercice n°30 page 309. *Calculer* ♣.

Exercice n°31 page 309. *Calculer.*

Exercice n°68 page 315. *Chercher.*

Exercice n°71 page 315. *Modéliser* ♣.

Exercice n°75 page 316. *Communiquer.*

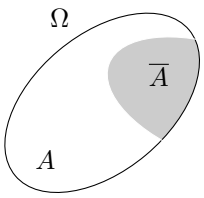
Exercice n°80 page 316. *Chercher.*

3.2 Evénement contraire

Définition 9

*L'***événement contraire** *(ou* **événement complémentaire***) de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.*
Autrement dit, on a

$$A \cap \overline{A} = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup \overline{A} = \Omega$$



Remarque

A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

Exemple

On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » $A = \{5; 6\}$

$\overline{A}$ « Ne pas obtenir résultat strictement supérieur à 4 » $\overline{A} = \{1; 2; 3; 4\}$

Proposition 10 *Pour tout événement A, on a*

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple

On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » $A = \{5; 6\}$

$\overline{A}$ « Ne pas obtenir résultat strictement supérieur à 4 » $\overline{A} = \{1; 2; 3; 4\}$

On a donc $p(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. D'après la formule, on a donc

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Méthode

- Bien repérer l'événement à étudier.
- Déterminer son événement contraire.
- Calculer sa probabilité grâce à la formule.

Exercice - Calculer

On considère deux évenements A et B tels que :

$$p(A) = 0,3 \quad ; \quad p(\overline{B}) = 0,5 \quad \text{et} \quad p(A \cap B) = 0,2$$

Calculer $p(\overline{A})$, $p(B)$ et $p(A \cup B)$.

Visionner la notion

- Formules des probabilités - Maths seconde - Les Bons Profs

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°10 page 305. *Calculer* ♣.

Exercice n°20 page 309. *Calculer.*

Exercice n°27 page 309. *Calculer.*

Exercice n°28 page 309. *Calculer.*

Exercice n°72 page 315. *Modéliser.*

Exercice n°73 page 315. *Chercher.*

Exercice n°74 page 316. *Communiquer.*

Exercice n°78 page 316. *Modéliser.*

Exercice n°79 page 316. *Modéliser* ♣.

4 Probabilités conditionnelles

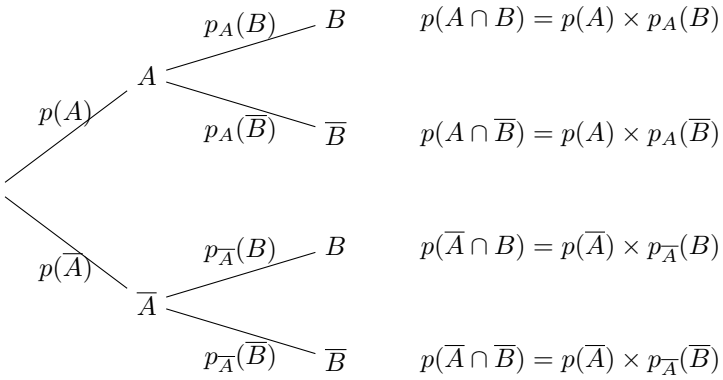
Définition 11 *La* **probabilité conditionnelle** *que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note $p_A(B)$ et est définie par :*

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Proposition 12

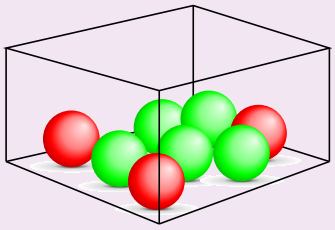
• *La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est égale à 1.*
La probabilité de l'événement à l'extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.

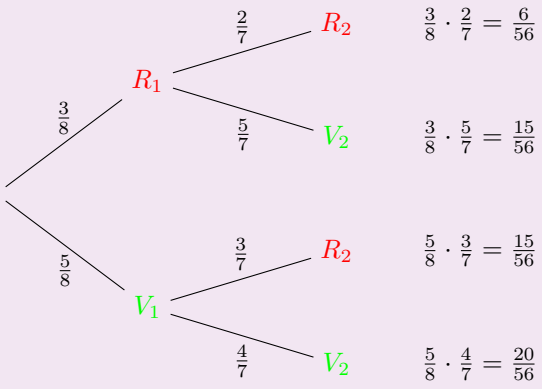
• *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.*



Exemple

Dans une urne, il y a 8 boules dont 3 sont rouges et 5 sont vertes. On tire successivement sans remise deux boules et on note leur couleur.
L'expérience peut se schématiser par l'arbre suivant :





Méthode

• Bien repérer les événements successifs.
• Bien repérer si l'on est dans une situation de "remise" ou "sans remise".
• Déterminer toutes les probabilités et les reporter sur l'arbre ou le tableau.
• Calculer les probabilités au "bout" de l'arbre.

Exercice - Modéliser

Dans une forêt, il y a 30% d'épicéas et 70% de sapins. 10% des arbres ont un parasite. Les épicéas représentent 20% des arbres touchés.
Quelle est la probabilité qu'un épicéa soit touché par le parasite ?

Visionner la notion

- Probabilités conditionnelles - Le rappel de cours - Maths terminale - Les Bons Profs
- Appliquer la formule des probabilités totales - Première/Terminale - m@ths et tiques
- Calculer une probabilité conditionnelle (1) - Première/Terminale - m@ths et tiques
- Calculer une probabilité conditionnelle (2) - Première/Terminale - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°35 page 296. *Modéliser.*
Exercice n°36 page 296. *Calculer.*
Exercice n°37 page 296. *Raisonner.*
Exercice n°38 page 296. *Calculer.*
Exercice n°39 page 297. *Calculer.*
Exercice n°40 page 297. *Calculer* ♣.
Exercice n°41 page 297. *Calculer* ♣.
Exercice n°42 page 297. *Représenter.*

5 Variable aléatoire

Définition 13 *On appelle* **variable aléatoire** *toute fonction X de l'univers Ω des possibilités dans $\mathbb{R}$.*

Définition 14 *Soit une variable alétoire X pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.*
La **loi de probabilité de X** *est l'ensemble des probabilités $P(X = x_i)$ de chaque valeur x_i.*
On consigne en général ces résultats dans un tableau :

Valeurs x_k prises par X	x_1	x_2	...	x_n
Probabilité $p_k = P(X = x_k)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple

Jouons au jeu suivant : On lance un dé non pipé une fois successivement.
- Si on tombe sur 6, on gagne 10 euros.
- Si on tombe sur 1, on gagne 5 euros.
- Dans tous les autres cas, on perd 6 euros.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (gain ou perte) lors d'une partie.

Voici comment l'on peut présenter la loi de probabilité de X :

Valeurs x_k prises par X	-6	5	10
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition 15 *Pour une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, avec les probabilités $p_1 = p(X = x_1)$, $p_2 = p(X = x_2)$, ..., $p_3 = p(X = x_n)$, on définit l'***espérance** *mathématique comme suit :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

Exemple

Repreons l'exemple de notre jeu précédent. On avait le tableau suivant :

Valeurs x_k prises par X	-6	5	10
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \\ &= -6 \times \frac{4}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{-24}{6} + \frac{5}{6} + \frac{10}{6} \\ &= \frac{-24 + 5 + 10}{6} = \frac{-9}{6} = -1,5 \end{aligned}$$

Remarque

Il est important de bien comprendre ce que l'on vient de calculer ! Il s'agit d'une *espérance*, c'est-à-dire que, dans notre exemple, on peut « espérer » perdre 1,5 euros (ou gagner -1,5 euros) en jouant un *nombre de fois suffisamment grand* !

Exercice - Modéliser. Calculer.

Lors d'un examen, un élève doit répondre à un QCM. Ce QCM comporte trois questions et, pour chaque question, trois réponses différentes sont proposées, dont une seule est exacte. Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une note totale négative est ramenée à 0.

1. Représenter toutes les issues possibles à l'aide d'un arbre.
2. On appelle X le total des points que l'élève a obtenu pour cet exercice.
Déterminer les différentes valeurs prises par X, la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
3. Ce sujet a été donné à 650 élèves qui ne connaissaient absolument pas le sujet, et qui ont donc tous répondu au hasard. A quelle moyenne des points peut-on s'attendre approximativement ?

Visionner la notion

- Variable aléatoire - Le rappel de cours - Maths première - Les Bons Profs
- Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

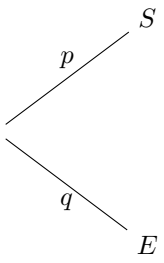
Exercice n°39 page 322. *Communiquer.*
Exercice n°40 page 322. *Modéliser.*
Exercice n°41 page 322. *Modéliser.*
Exercice n°42 page 322. *Modéliser.*
Exercice n°43 page 322. *Modéliser* ♣.
Exercice n°44 page 323. *Modéliser.*
Exercice n°45 page 323. *Modéliser* ♣.
Exercice n°46 page 323. *Modéliser.*
Exercice n°47 page 323. *Modéliser* ♣.
Exercice n°48 page 323. *Modéliser.*

6 Loi binomiale

Définition 16

- *On appelle* **épreuve de Bernoulli** *une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : un succès noté S et de probabilité p, et un échec noté E de probabilité $q = 1 - p$.*

- *Un* **schéma de Bernoulli** *est une expérience aléatoire qui consiste à répéter plusieurs fois et de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli.*



Définition 17 *On considère un schéma de Bernoulli, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions.*
Alors X suit la loi binomiale de paramètres n, le nombre d'épreuves répétées, et p, la probabilité d'un succès lors d'une épreuve.
On note cette loi $\mathcal{B}(n; p)$.

Exercice - Modéliser

Une compagnie d'assurance constate que 60 % des maisons assurées n'ont pas subi de sinistre dans l'année en cours.
Pour adapter les contrats, elle décide de prélever trois dossiers au hasard parmi ses clients.
La compagnie est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer ces prélèvements comme étant avec remise.

1. Justifier que cette expérience correspond à un schéma de Bernoulli.
2. Calculer la probabilité que deux maisons, ou plus, n'aient pas subi de sinistre.