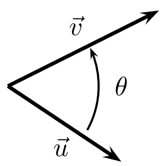
Produit scalaire - Première

Mohamed NASSIRI

1 Expressions et propriétés du produit scalaire

Définition 1
• *Le* **produit scalaire** *de deux vecteurs non nuls* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, noté* $\vec{u} \cdot \vec{v}$*, est le nombre,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \,.\, \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

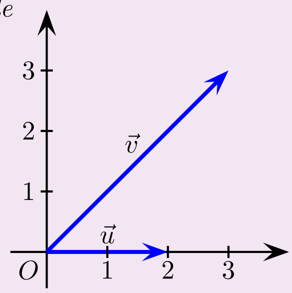


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \,.\, \cos\theta$$

Remarque

Si A, B et C sont trois points du plan, alors : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$

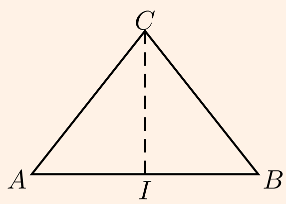
Exemple



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = 6$$

Exercice. Calculer

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. I est le milieu de $[AB]$.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BI}$.

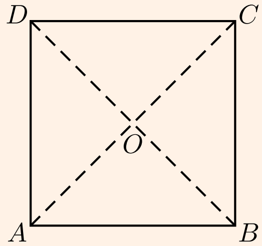


Proposition 2
• *Si les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires de même sens, alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$.
• *Si les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires de sens contraires, alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$.
• *Les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul* (*i.e.*)

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Exercice. Calculer

$ABCD$ est un carré de côté 2 cm de centre O.



Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DC}$

Définition 3 *Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ avec lui-même, appelé* **carré scalaire** *et noté $\vec{u}^2$, est* $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Proposition 4 *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout nombre réel k :*
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$

Corollaire 5 Identités remarquables scalaires
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$

Remarque
Il faut bien évidemment ici faire le rapprochement avec les identités remarquables « classiques » :
Pour a et b deux nombres réels, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

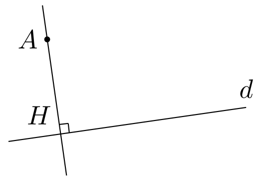
Visionner la notion
- Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner
Exercices sur lelivrescolaire.fr :
- Exercice n°38 page 244. *Chercher.*
- Exercice n°39 page 244. *Chercher* ♣.
- Exercice n°47 page 245. *Modéliser* **Physique**.
- Exercice n°48 page 246. *Modéliser* **Physique**.

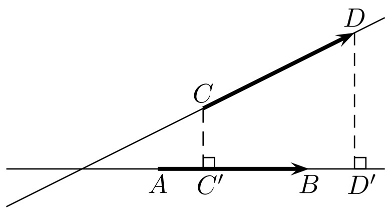
2 Projection orthogonale

Définition 6

Soit une droite d et un point A du plan.
Le **projeté orthogonal** *H de A sur d est le point d'intersection de d et de la perpendiculaire à d passant par A.*



Proposition 7 *Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs, et C' et D' les projetés othogonaux de C et D sur la droite (AB) ; alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.*



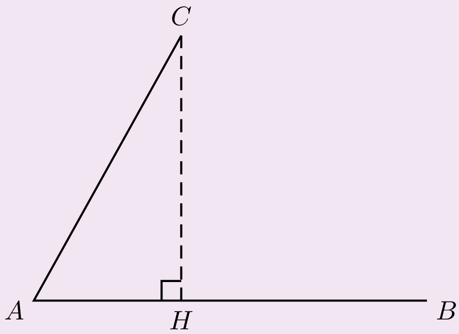
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$

Exemples

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

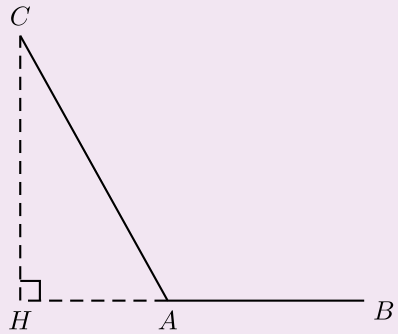
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



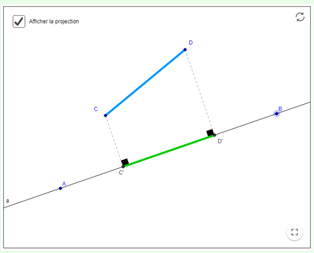
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

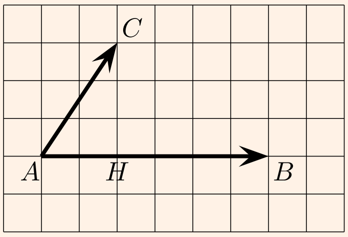


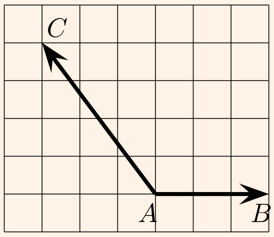
Projection d'un segment sur une droite - Geogebra

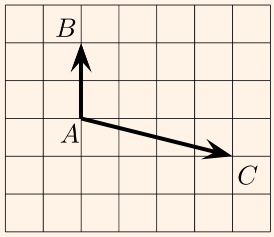
Pour bien vous entraîner à projeter un segment sur une droite, je vous conseille fortement l'application de Pascal Lapalme



Exercice. Chercher - Calculer



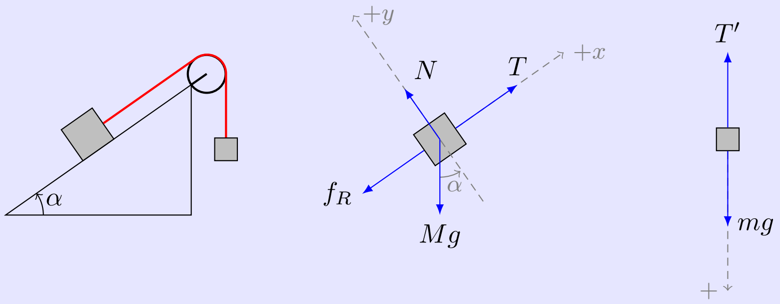




$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ \ldots$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ \ldots$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ \ldots$

Remarque

Il est important de faire un parallèle entre cette notion et la mécanique du point en physique. On utilise très fréquemment la projection pour pouvoir faciliter un problème physique concret.



Visionner la notion

- Calculer un produit scalaire par projection - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°40 page 245. *Chercher.*

Exercice n°44 page 245. *Raisonner.*

Exercice n°45 page 245. *Raisonner.*

Exercice n°53 page 246. *Calculer.*

3 Autres expressions du produit scalaire

3.1 Avec des normes uniquement

Proposition 8 *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarque
Il ne s'agit que de la première identité remarquable scalaire que l'on a vu précédemment et que l'on a réécrit autrement :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Exercice. Calculer

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

3.2 A l'aide des coordonnées

Proposition 9 *Soit dans un repère orhonormal* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, *alors*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice. Calculer

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants, et en déduire une valeur de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ à $0,1$ degré près.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

Visionner la notion
- Calculer la mesure d'un angle avec le produit scalaire - Première - m@ths et tiques
- Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées - Première - m@ths et tiques
- Appliquer la propriété d'orthogonalité des vecteurs - Première - m@ths et tiques
- Produit scalaire - Propriétés - Maths 1ère - Les Bons Profs

Pour s'entraîner
Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°41 page 245. *Représenter.*
Exercice n°42 page 245. *Modéliser* .
Exercice n°43 page 245. *Calculer* ♣.
Exercice n°46 page 245. *Calculer.*
Exercice n°49 page 246. *Calculer* ♣.
Exercice n°50 page 246. *Calculer.*
Exercice n°51 page 246. *Calculer.*
Exercice n°52 page 246. *Modéliser* **Physique**.
Exercice n°54 page 246. *Chercher.*
Exercice n°56 page 247. *Chercher.*