Corrigé - Corvée n°3

Limites de suites - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 02/11/2020

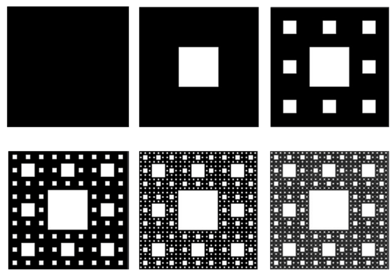
Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« *L'espoir, c'est une erreur. Si tu peux pas réparer ce qui est cassé, tu deviens fou.* »
Max Rockatansky, *Mad Max : Fury Road* (2015).

Exercice 1

On va s'intéresser à une très célèbre et jolie figure géométrique : le tapis de Sierpiński.
On considère un carré dont l'aire est de 1 m^2. Pour construire la figure ci-dessous, on partage ce carré en neuf carrés égaux et on colorie en blanc celui du centre.
On partage ensuite chacun des huits carrés restants en neuf carrés égaux et on colorie en blanc les huits au centre.
On recommence cette construction à chaque étape. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_1 l'aire totale coloriée en blanc après la n-ième étape. On a donc $A_1 = \dfrac{1}{9}$.



Tapis de Sierpiński, de l'étape 0 *à* 5

1.a. Quelle proportion de la surface noire restante est coloriée en blanc à chaque étape ?
A chaque étape, on colorie en blanc $\dfrac{1}{9}$ème (un neuvième) de la surface noire restante.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

Puisque A_n est l'aire de la surface totale coloriée après n étapes, à l'étape $n+1$, on colorie $\dfrac{1}{9}$ de la partie non coloriée, soit $\dfrac{1}{9}(1 - A_n)$ que l'on doit ajouter à A_n l'aire déjà coloriée. D'où

$$A_{n+1} = \frac{1}{9}(1 - A_n) + A_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}A_n + A_n = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$.
a. Montrer que la suite (B_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Pour montrer que (B_n) est une suite géométrique, on montre qu'il existe une constante q (la raison de la suite...) telle que $B_{n+1} = qB_n$. Allons-y !

$$\begin{aligned} B_{n+1} = A_{n+1} - 1 &= \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - 1 \\ &= \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - \frac{9}{9} \\ &= \frac{8}{9}A_n - \frac{8}{9} \\ &= \frac{8}{9}(A_n - 1) = \frac{8}{9}B_n \end{aligned}$$

Par conséquent, (B_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = \dfrac{1}{9} - 1 = -\dfrac{8}{9}$

b. Exprimer B_n en fonction de n.

Rappel

On rappelle que pour (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Mais, comme ici, il se peut que l'on n'ait pas le premier terme v_0 lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne v_n à partir d'un terme différent de v_0 :

Soit (v_n) une suite géométrique non nulle de raison $q \neq 0$, alors, pour tous entiers n et p,

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Puisque (B_n) est une suite géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = -\frac{8}{9}$, on a donc

$$B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

c. Exprimer alors A_n en fonction de n.

Puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$, on a

$$A_n = B_n + 1 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

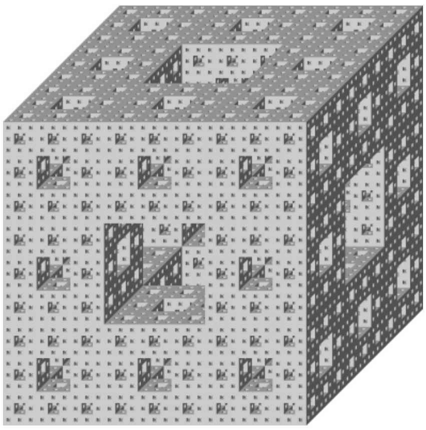
d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

Puisque $\frac{8}{9} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$, par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = 1$$

Remarque

Ce dernier résultat nous dit que l'aire de la partie coloriée en blanc tend vers 1. C'est à dire qu'à l'infini, le carré disparait...

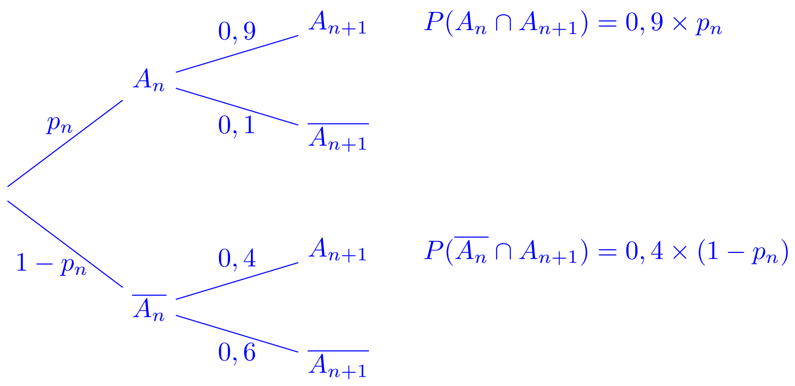


L'éponge de Menger : une version 3D du tapis de Sierpiński

Exercice 2

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.
Le détaillant réaliser une étude sur ses clients. Il constate que :
• parmi les clients achetant un melon une semaine donnée, 90% d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
• parmi les clients n'achetant pas de melon une semaine donnée, 60% d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement : « *le client achète un melon au cours de la semaine* n » et $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
Il semble très intéressant, voir indispensable de faire un arbre de probabilité :



• **Calcul de p_{n+1} :**

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\ &= 0,9 \times p_n + 0,4 \times (1 - p_n) \\ &= 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n \\ &= 0,5p_n + 0,4 \end{aligned}$$

2.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$.
Enoncé : Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n > 0,8$$

Démonstration :
• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $p_n > 0,8$ ».

• Initialisation : Soit $n = 1$. Nous devons donc montrer que $p_1 > 0,8$;
Comme $p_1 = 1$, on a bien $p_1 > 0,8$.
On a donc bien montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel k ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: « $p_k > 0,8$ ».
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \; : \; « \, p_{k+1} > 0,8 \, »$$

• Hérédité :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 0,5p_k + 0,4 \\ &= 0,5 \underbrace{p_k}_{>0,8} + 0,4 \\ &> 0,5 \times 0,8 + 0,4 \\ &> 0,8 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

• Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $p_n > 0,8$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
Pour montrer que la suite (p_n) est décroissante, on doit montrer que $p_{n+1} - p_n \geqslant 0$. Allons-y !

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 0,5p_n + 0,4 - p_n \\ &= -0,5p_n + 0,4 \end{aligned}$$

Or, puisque $p_n > 0,8$ (d'après la question précédnte), on a donc $-0,5p_n < -0,4$. Ainsi, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \underbrace{-0,5p_n}_{\leqslant -0,4} + 0,4 \\ &\leqslant -0,4 + 0,4 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque, pour tout entier n non nul, $p_{n+1} - p_n \geqslant 0$, la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
Oui ! La suite (p_n) est décroissante et minorée (par $0,8$) donc par le théorème de convergence monotone, la suite (p_n) est convergente.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = p_n - 0,8$.
a. Démontrer que (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et son premier terme v_1.
Comme précédemment, pour montrer que (v_n) est une suite géométrique, on montre qu'il existe une constante q (la raison de la suite...) telle que $v_{n+1} = qv_n$. Allons-y !

$$\begin{aligned} v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 &= 0,5p_n + 0,4 - 0,8 \\ &= 0,5p_n - 0,4 \\ &= 0,5p_n - 0,5 \times 0,8 \\ &= 0,5(p_n - 0,8) = 0,5v_n \end{aligned}$$

Par conséquent, (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,8 = 0,2$

b. Exprimer v_n en fonction de n.
Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_1 = -0,2$, on a donc

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times (0,5)^{n-1}$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
Puisque $v_n = p_n - 0,8$, alors $p_n = v_n + 0,8$. Par suite,

$$p_n = v_n + 0,8 = 0,2 \times (0,5)^{n-1} + 0,8$$

c. Déterminer la limite de la suite (p_n).
Puisque $0,5 < 1$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^{n-1} = 0$, par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,8$$

Remarque
Ce dernier résultat nous dit qu'*à très long terme*, la probabilité qu'un client achète un melon est de 0,8... Autrement dit, *à très long terme*, en prenant un client au hasard dans son magasin, il y a 80% de chance que celui-ci achète un melon.

Exercice 3 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0,0001$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \exp\sqrt{z_n}$. On donne la fonction ci-dessous.

```
from math import *

def fonction(p)
    N=0
    Z=0.0001
    while Z < 10**p:
        N=N+1
        Z=exp(sqrt(Z))
    print(N)
```

1. Quelle est la valeur renvoyée lors de l'appel `fonction(2)` ? Et lors de l'appel `fonction(5)` ?

```
>>> fonction(2)
6
>>> fonction(5)
8
```

2. De manière générale, quelle valeur est renvoyée lors de l'appel `fonction(p)` ?
L'algorithme renvoie la valeur du plus grand rang N qui vérifie $z_N < 10^p$.

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (z_n) ?
En utilisant quelques valeurs de `p`, on a :

```
>>> fonction(50)
8
>>> fonction(100)
8
```

Cela veut dire que pour $p = 100$, dès le rang $n = 9$, les valeurs de z_n sont supérieures à 10^{100}. On peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$

Remarque
En prenant des valeurs plus grandes de `p`, on obtient le message suivant :

`OverflowError: math range error`

En fait, la valeur devient trop grande à calculer (même pour Pyhon !).