Corrigé - Corvée n°1

Probabilités conditionnelles et loi uniforme discrète
Terminale Mathématiques complémentaires

A rendre le : 14/10/2020

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

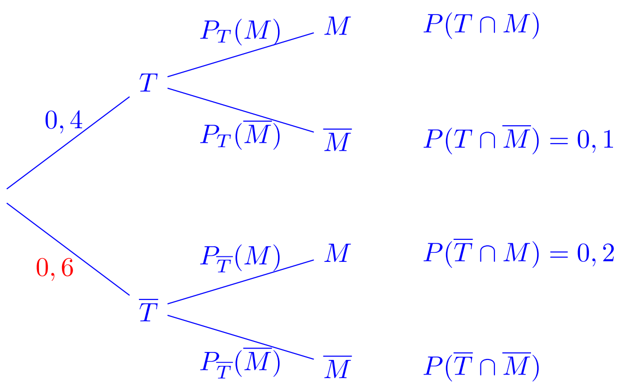
« *Si vous parlez à Dieu, vous êtes croyant. S'il vous répond, c'est que vous êtes schyzo.* »

Gregory House, *Docteur House* (2004).

Exercice 1

On choisit un élève au hasard dans le cycle terminal d'un lycée. On note T l'événement « *L'élève est en Terminale* » et M l'événement « *L'élève suit un enseignement de maths* ».
On suppose que $P(T) = 0,4$, $P(T \cap \overline{M}) = 0,1$ et $P(\overline{T} \cap M) = 0,2$.

Déterminer $P_T(M)$,$P_M(T)$ et $P_M(\overline{T})$.
Il semble très intéressant, voir indispensable de faire un arbre de probabilité :



• Calcul de $P_T(M)$:
Pour calculer $P_T(M)$, on aimerait utiliser la formule

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)}$$

Mais on ne connaît pas directement $P(T \cap M)$... Calculons donc d'abord $P(T \cap M)$ (et on en profitera aussi pour calculer $P(\overline{T} \cap \overline{M})$).
Grâce à la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \quad &\Leftrightarrow \quad P(T \cap M) = P(T) - P(T \cap \overline{M}) \\ &\Leftrightarrow \quad P(T \cap M) = 0,4 - 0,1 = 0,3 \end{aligned}$$

mais aussi

$$\begin{aligned} P(\overline{T}) = P(\overline{T} \cap M) + P(\overline{T} \cap \overline{M}) \quad &\Leftrightarrow \quad P(\overline{T} \cap \overline{M}) = P(\overline{T}) - P(\overline{T} \cap M) \\ &\Leftrightarrow \quad P(\overline{T} \cap \overline{M}) = 0,6 - 0,2 = 0,4 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

• **Calcul de $P_M(T)$:**

Pour calculer $P_M(T)$, on aimerait utiliser la formule de Bayes :

$$P_T(M) \times P(T) = P_M(T) \times P(M) \quad \Leftrightarrow \quad P_M(T) = \frac{P_T(M) \times P(T)}{P(M)}$$

mais manque de bol, on ne connait pas $P(M)$... Calculons donc $P(M)$! Toujours d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(M) = P(T \cap M) + P(\overline{T} \cap M) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

Par suite, on a

$$P_M(T) = \frac{P_T(M) \times P(T)}{P(M)} = \frac{0,75 \times 0,4}{0,5} = 0,6$$

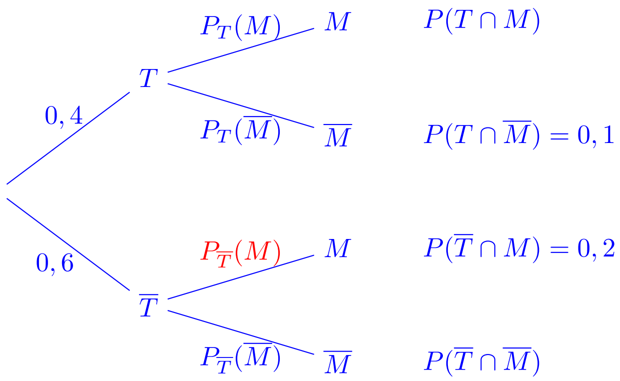
• **Calcul de $P_M(\overline{T})$:**

Pour calculer $P_M(\overline{T})$, là encore, on aimerait utiliser la formule de Bayes :

$$P_{\overline{T}}(M) \times P(\overline{T}) = P_M(\overline{T}) \times P(M) \quad \Leftrightarrow \quad P_M(\overline{T}) = \frac{P_{\overline{T}}(M) \times P(\overline{T})}{P(M)}$$

mais manque de bol, ici on ne connait pas $P_{\overline{T}}(M)$... Pour $P(\overline{T})$, ça n'est pas réellement un problème car $P(\overline{T}) = 1 - P(T)$.

Calculons donc $P_{\overline{T}}(M)$! Je redessine l'arbre de probabilité pour mieux visualiser ce que l'on cherche :



Par conséquent,

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(\overline{T} \cap M)}{P(\overline{T})} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$

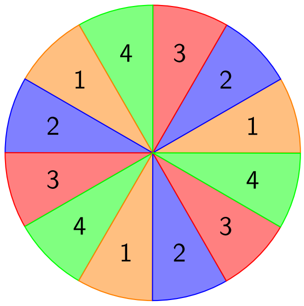
Attention !
En Terminale, on laisse les fractions et on ne fait pas d'approximations !

On reprend la formule de Bayes :

$$P_M(\overline{T}) = \frac{P_{\overline{T}}(M) \times P(\overline{T})}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \times (1 - 0,4)}{0,5} = \frac{\frac{1}{3} \times 0,6}{0,5} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

Exercice 2

Dans une kermesse, on fait tourner la roue équilibrée ci-contre où tous les secteurs ont le même angle.
Le joueur gagne le nombre de points indiqués sur le secteur désigné par la flèche.
X est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.



1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4\}$ si :

$$\text{pour tout } k \in \{1; 2; 3; 4\},\ P(X = k) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

2. Combien de points un joueur peut-il espérer gagner en moyenne au cours d'une partie ?
La réponse est dans la question (plus précisement dans le verbe "espérer"). Il faut tout simplement calculer l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

3. Pour faire tourner la roue, le joueur doit miser 1 €. Un point rapporte 40 centimes.
Le jeu est-il équitable ?
Il suffit donc d'établir le tableau sythétisant la loi de probabilité de X :

Valeurs x_k prises par X	$-0,6$	$-0,2$	$0,2$	$0,6$
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

En calculant l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i &= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 \\
&= -0,6 \times \frac{1}{4} + (-0,2) \times \frac{1}{4} + 0,2 \times \frac{1}{4} + 0,6 \times \frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque l'espérance est nulle, on en déduit que le jeu est équitable.