Corvée n°3

Limites de suites - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 02/11/2020

Encouragements

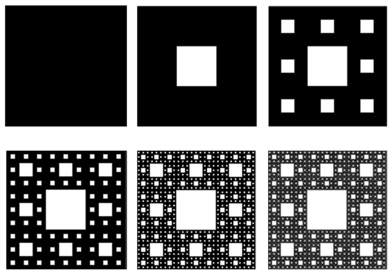
Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« L'espoir, c'est une erreur. Si tu peux pas réparer ce qui est cassé, tu deviens fou. »

Max Rockatansky, *Mad Max : Fury Road* (2015).

<u>Exercice 1</u>

On va s'intéresser à une très célèbre et jolie figure géométrique : le tapis de Sierpiński.
On considère un carré dont l'aire est de 1 m^2. Pour construire la figure ci-dessous, on partage ce carré en neuf carrés égaux et on colorie en blanc celui du centre.
On partage ensuite chacun des huits carrés restants en neuf carrés égaux et on colorie en blanc les huits au centre.
On recommence cette construction à chaque étape. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_1 l'aire totale coloriée en blanc après la n-ième étape. On a donc $A_1 = \dfrac{1}{9}$.

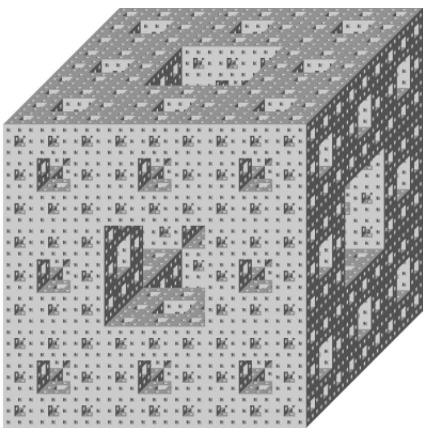


Tapis de Sierpiński, de l'étape 0 *à* 5

1.a. Quelle proportion de la surface verte restante est coloriée en blanc à chaque étape ?
b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$.
a. Montrer que la suite (B_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
b. Exprimer B_n en fonction de n.
c. Exprimer alors A_n en fonction de n.
d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.



L'éponge de Menger : une version 3D du tapis de Sierpiński

Exercice 2

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.
Le détaillant réaliser une étude sur ses clients. Il constate que :
• parmi les clients achetant un melon une semaine donnée, 90% d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
• parmi les clients n'achetant pas de melon une semaine donnée, 60% d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement : « *le client achète un melon au cours de la semaine n* » et $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
2.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$.
b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = p_n - 0,8$.
a. Démontrer que (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et son premier terme v_1.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 3 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0,0001$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \exp\sqrt{z_n}$. On donne la fonction ci-dessous.

```
from math import *

def fonction(p)
    N=0
    Z=0.0001
    while Z < 10**p:
        N=N+1
        Z=exp(sqrt(Z))
    return(N)
```

1. Quelle est la valeur renvoyée lors de l'appel `fonction(2)` ? Et lors de l'appel `fonction(5)` ?
2. De manière générale, quelle valeur est renvoyée lors de l'appel `fonction(p)` ?
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (z_n) ?