Corrigé - Corvée n°2

Combinatoire et dénombrement - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 06/10/2020

Encouragements

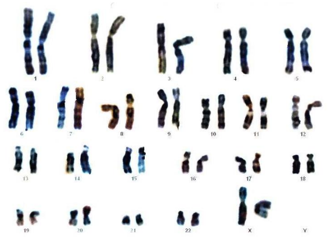
Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

« Il n'y a pas de petits gestes quand nous sommes 7 milliards à les faire. »

Slogan écologique

Exercice 1

L'espèce humaine possède 23 paires de chromosomes. Chaque cellule reproductrice (aussi appelée gamète) contient un chromosome de chaque paire choisi de façon aléatoire.
Lors de la reproduction, l'ovule de la mère et le spermatozoïde du père fusionnent pour former une cellule appelé zygote qui, par divisions successives, engendrera un embryon. Le zygote contient ainsi 23 paires de chromosomes et chaque paire est constituée d'un chromosome provenant de la mère et d'un chromosome provenant du père.



Caryotype d'un être humain de sexe féminin (XX).

1. Combien un être humain peut-il produire de gamètes différents ?
Par exemple avec deux paires de chromosomes on obtient 4 gamètes possibles (soit $2^2 = 4$), avec 3 paires de chromosomes nous avons obtenu 8 gamètes possibles (soit $2^3 = 8$).Avec les 23 paires du génome humain on a 2^{23} possibilités (soit plus de 8 millions de possibilités !)

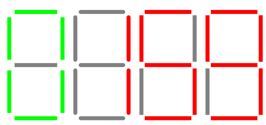
Remarque : On parle ici en absence de toute recombinaison méiotique (*crossing-over*). Avec les crossing-over, le nombre de gamètes différents peut être considéré comme infini.

2. Combien de zygotes différents un couple peut-il engendrer ?
Parmi les 2^{23} spermatozoïdes différents et les 2^{23} ovules différents, seuls 2 pris au hasard vont se rencontrer.
Il y a donc $2^{23} \times 2^{23} = 2^{46}$ (soit plus de 70 mille milliards de possibilités !)

Remarque : Ce qui explique que chaque être humain est unique...

Exercice 2

Pour entrer dans son immeuble, Paul-Gustavo doit saisir un code formé d'une lettre suivie de trois chiffres.



Un mot de passe possible

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
Il y a 26 lettres dans l'alphabet français et 10 chiffres (de 0 à 9). En utilisant le principe multiplicatif, on a donc $26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26\ 000$ codes possibles.
On peut visualiser le problème de la façon suivante :

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$

26 choix 10 choix 10 choix 10 choix

2. Paul-Gustavo a oublié son code mais il se rappelle qu'il commence par la lettre O. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre O ?
Puisque la lettre est fixée, toujours en utilisant le principe multiplicatif, $10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$ codes possibles.

3. Il se rappelle aussi que les chiffres sont 1, 5 et 9, mais ne se souvient plus dans quel ordre... Combien d'essais au maximum lui faudra-t-il pour rentrer chez lui ?
Les chiffres sont 1, 5 et 9 étant différents, il n'est donc pas possible qu'il y ait des répétitions (par exemple, on exclut les possibilités du type $\{1; 5; 5\}$ puisque 9 n'apparait pas...).
Cela revient donc à chercher les permutations de 3 éléments : Paul-Gustavo a donc $3! = 6$ possibilités à tester.

<u>Exercice 3</u>

Chaque véhicule circulant en France est identifié par une plaque d'immatriculation.
Depuis 2009, elle est constituée de trois parties : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, séparées par des tirets.

Les lettres I, O et U sont exclues à cause de leur ressemblance avec le 1, le 0 et le V.
Les couples de lettres SS et WW sont interdits à gauche et le couple de lettre SS est interdit à droite.

1. Calculer le nombre total de plaques d'immatriculations différentes que l'on peut attribuer.
Puisque les lettres I, O et U sont exclues, il n'y a plus que 23 lettres restantes. On a donc $23 \times 23 = 529$ possibilités à gauche et droite du nombre central.
Cependant, il faut retirer les 2 couples interdits à gauche, donc 527 possibilités à gauche et le couple interdit à droite, donc 527 possibilités à droite. On a donc finalement pour les lettres, 278 256 possibilités.

Pour les nombres, c'est plus simple, on a donc $10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$ possibilités.

Pour conclure, le nombre total de plaques d'immatriculations différentes que l'on peut attribuer est $278\ 256 \times 1\ 000 = 278\ 256\ 000$.

2. Combien d'immatriculations contiennent chacune des lettres M, A, T et H exactement une fois ?
Cela vient donc à calculer le nombre de permutations de 4 éléments, à savoir $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ pour les lettres.
Il faut se rappeler que, pour les nombres, on a toujours $10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$ possibilités.
Par conséquent, le nombre d'immatriculations contiennent chacune des lettres M, A, T et H exactement une fois est $24 \times 1\ 000 = 24\ 000$.

3. Un palindrome est un texte qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche. [1] Par exemple, la plaque `AB-212-BA` est un palindrome.
Combien d'immatriculations sont des palindromes ?
Pour créer une plaque d'immatriculations palindrome, on a $23 \times 23 = 529$ possibilités à gauche et une fois que cela est fait, on n'a plus de choix possibles pour les lettres de droites. Mais il faut encore retirer les 2 couples interdits à gauche. On a donc, pour les lettres, 527 possibilités.
Pour les nombres, on a donc $10 \times 10 = 100$ possibilités car une fois le premier nombre fixé, on n'a plus de choix pour le troisième et celui du milieu nous laisse encore 10 possibilités.

Pour conclure, le nombre total de plaques d'immatriculations qui sont des palindromes est $527 \times 100 = 52700$.

<u>Exercice 4</u>

On rappelle que le package `itertools` permet de faire du dénombrement et de la combinatoire.
Un white hat tente de pirater le mot de passe d'un black hat. La seule information qu'il possède est que

1. Un autre palindrome assez connu, dû à Alain Damasio, est « *Engage le jeu que je le gagne* ».

le mot de passe, avec 4 champs, contient les lettres J, K, L et M.

1. A l'aide des commandes du package `itertools`, écrire un algorithme qui liste les possibilités pour le mot de passe.
Combien existe-t-il de possibilités ?
On peut répondre à la deuxième partie de la question sans faire l'algorithme : on a 4 choix possibles pour le premier caractère, 4 pour le suivant, etc. Ainsi, on a $4^4 = 256$ possibilités.

```
from itertools import *
result=product('JKLM', repeat=4)
for uplet in result:
    print(uplet)

>>>
('J', 'J', 'J', 'J')
('J', 'J', 'J', 'K')
('J', 'J', 'J', 'L')
('J', 'J', 'J', 'M')
('J', 'J', 'K', 'J')
('J', 'J', 'K', 'K')
('J', 'J', 'K', 'L')
...
('M', 'M', 'L', 'K')
('M', 'M', 'L', 'L')
('M', 'M', 'L', 'M')
('M', 'M', 'M', 'J')
('M', 'M', 'M', 'K')
('M', 'M', 'M', 'L')
('M', 'M', 'M', 'M')
```

2. Il apprend que les lettres n'apparaissent finalement qu'une seule fois dans le mot de passe.
Ecrire un algorithme qui liste les possibilités pour le mot de passe.
Combien existe-t-il de possibilités ?
Encore une fois, on peut répondre à la deuxième partie de la question sans faire l'algorithme : il s'agit du nombre de permuations de 4 éléments. Ainsi, on a $4! = 24$ possibilités.

```
from itertools import *
result=permutations('JKLM', 4) # permutations sur un ensemble à 4 éléments
for arrangement in result:
    print(arrangement)

>>>
('J', 'K', 'L', 'M')
('J', 'K', 'M', 'L')
('J', 'L', 'K', 'M')
('J', 'L', 'M', 'K')
('J', 'M', 'K', 'L')
('J', 'M', 'L', 'K')
('K', 'J', 'L', 'M')
('K', 'J', 'M', 'L')
('K', 'L', 'J', 'M')
('K', 'L', 'M', 'J')
('K', 'M', 'J', 'L')
('K', 'M', 'L', 'J')
('L', 'J', 'K', 'M')
('L', 'J', 'M', 'K')
('L', 'K', 'J', 'M')
('L', 'K', 'M', 'J')
('L', 'M', 'J', 'K')
('L', 'M', 'K', 'J')
('M', 'J', 'K', 'L')
```

```
('M', 'J', 'L', 'K')
('M', 'K', 'J', 'L')
('M', 'K', 'L', 'J')
('M', 'L', 'J', 'K')
('M', 'L', 'K', 'J')
```

3. Le white hat a trouvé deux caractères du mot de passe sur les quatre.
Combien de possibilités lui reste-t-il pour trouver le mot de passe ?
Finalement, puisque deux caractères du mot de passe sur les quatre ont été trouvés, il ne reste plus que 2 caractères à positionner parmi deux lettres restantes.

Trouvé	Trouvé	2 choix	1 choix

Il ne reste finalement que 2 possibilités à tester.