Corrigé - Corvée n°1

Suites numériques et récurrence - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 21/09/2020

Encouragements

Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

> *« Tu vois, le monde se divise en deux catégories, ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent. Toi tu creuses. »*
>
> Le bon, la brute et le truand, Blondin à Tuco, 1966.

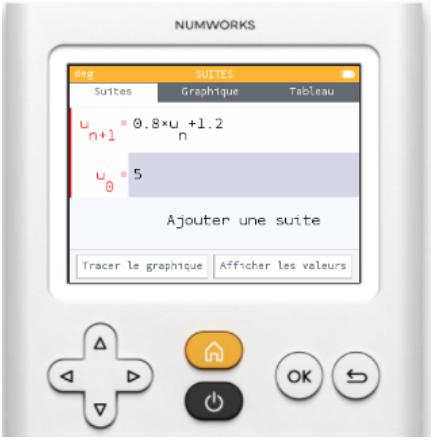
Exercice 1

En 2020, une ville compte 5000 habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que, chaque année :
• 20% des habitants de la ville meurent ou quittent la ville ;
• 1200 personnes naissent ou emménagent dans la ville.
On note u_n le nombre d'habitants (exprimé en milliers) l'année $2020 + n$.

1. Expliquer pourquoi $u_0 = 5$.
On a 5 000 habitants en 2020, le nombre d'habitants (exprimé en milliers !) de l'année 2020 $(2020 + 0)$ est donc $u_0 = 5$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 1,2$.
Comme 20% des habitants de la ville meurent ou quittent la ville, cela correspond à un coefficient multiplicateur de $\left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 1 - 0,2 = 0,8$.
Puis, comme 1200 personnes naissent ou emménagent dans la ville, cela correspond à un ajout de $1,2$ (les termes de la suite sont exprimés en milliers...).
On a donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 1,2$.

3. En utilisant la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et démontrer la conjecture par récurrence.
Je vous renvoie à la section *3 Programmer des suites sur calculatrice et en Python, 3.1 Sur la calculatrice* pour les détails de la marche à suivre :



Conjecture : La suite (u_n) **semble** croissante. C'est une conjecture ! Il faut la démontrer. Allons-y !

Enoncé : Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante (*i.e.*) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} \geqslant u_n$$

Démonstration :
• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».

• Initialisation : Soit $n = 0$. Nous devons donc montrer que $u_1 \geqslant u_0$;
D'une part, $u_0 = 5$.
D'autre part, $u_1 = 0,8u_0 + 1,2 = 5,2$.
On a donc bien $u_1 \geqslant u_0$, et ainsi, on a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel k ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: « $u_{k+1} \geqslant u_k$ ».
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \text{ : « } u_{k+2} \geqslant u_{k+1} \text{ »}$$

Remarque
On va utiliser une petite astuce très utile. Montrer que :

$$u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$$

revient à montrer que :

$$u_{k+2} - u_{k+1} \geqslant 0$$

Au passage, on a supposé que $\mathcal{P}(k)$: « $u_{k+1} \geqslant u_k$ » est vraie ! Avec notre astuce, cela revient à dire que :

$$u_{k+1} - u_k \geqslant 0 \text{ est vraie !}$$

• Hérédité :

$$\begin{aligned} u_{k+2} - u_{k+1} &= 0,8u_{k+1} + 1,2 - (0,8u_k + 1,2) \\ &= 0,8u_{k+1} + 1,2 - 0,8u_k - 1,2 \\ &= 0,8u_{k+1} - 0,8u_k \\ &= 0,8(u_{k+1} - u_k) \\ &= 0,8 \underbrace{(u_{k+1} - u_k)}_{\geqslant 0 \text{ par H.R.}} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

• Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (*i.e.*) la suite (u_n) est croissante.

4.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.
C'est reparti pour un tour !
Enoncé : Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leqslant 6$$

Démonstration :
• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 6$ ».

• Initialisation : Soit $n = 0$. Nous devons donc montrer que $u_0 \leqslant 6$;
Comme $u_0 = 5$, on a bien $u_0 \leqslant 6$.
On a donc bien montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel k ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: « $u_k \leqslant 6$ ».
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \text{ : « } u_{k+1} \leqslant 6 \text{ »}$$

• Hérédité :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 0,8u_k + 1,2 \\ &= 0,8 \underbrace{u_k}_{\leqslant 6} + 1,2 \\ &\leqslant 0,8 \times 6 + 1,2 \\ &\leqslant 6 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

•Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$.

b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
Dans le contexte de l'exercice, dire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$ revient à dire le nombre d'habitants sera toujours inférieur ou égal à 6 000 (que quel que soit l'année considérée).

Exercice 2

Un roi distribue des pièces d'or à ses ministres :
- au premier ministre, il donne cinq pièces ;
- au second ministre, il donne le double du premier moins deux pièces ;
- au troisième ministre, il donne le double du second moins trois pièces ;
- et ainsi de suite ...

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note a_n le nombre de pièces d'or distribuées au n-ième ministre.

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
Dans ce genre d'exercices, il peut être intéressant de calculer les premiers termes pour avoir une idée de la relation entre a_{n+1} et a_n.
• $a_1 = 5$;
• $a_2 = 2 \times a_1 - 2 = 2 \times 5 - 2 = 10 - 2 = 8$.
• $a_3 = 2 \times a_2 - 3 = 2 \times 8 - 3 = 16 - 3 = 13$;
• etc.

D'après les explications de l'énoncé, on en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = 2a_n - (n+1)$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 2^n + n + 2$.
C'est parti pour une nouvelle récurrence de folie !

Enoncé : Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^n + n + 2$.

Démonstration :
• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $a_n = 2^n + n + 2$ ».

• Initialisation : Soit $n = 1$ (oui ici le premier rang ici, c'est $n = 1$ et pas $n = 0$!).
D'une part, $a_1 = 8$.
D'autre part, $2^1 + 1 + 2 = 5$.
On a donc bien montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel non nul k ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: « $a_k = 2^k + k + 2$ ».
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \text{ : « } a_{k+1} = 2^{k+1} + (k+1) + 2 \text{ »}$$

(ou encore « $a_{k+1} = 2^{k+1} + k + 3$ »).

• Hérédité :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - (k+1) \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= 2(2^k + k + 2) - (k+1) \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 2 \times 2^k + 2 \times k + 2 \times 2 - (k+1) \\ &= 2^{k+1} + 2k + 4 - k - 1 \\ &= 2^{k+1} + k + 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

• Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^n + n + 2$.

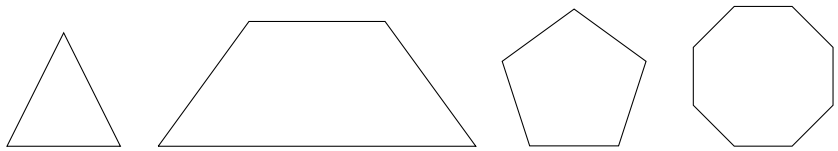
3. Combien de pièces d'or recevra le 10e ministre ?
Il suffit tout simplement de calculer le terme u_{10} à l'aide de la formule de la question précédente :

$$u_{10} = 2^{10} + 10 + 2 = 1024 + 10 + 2 = 1036$$

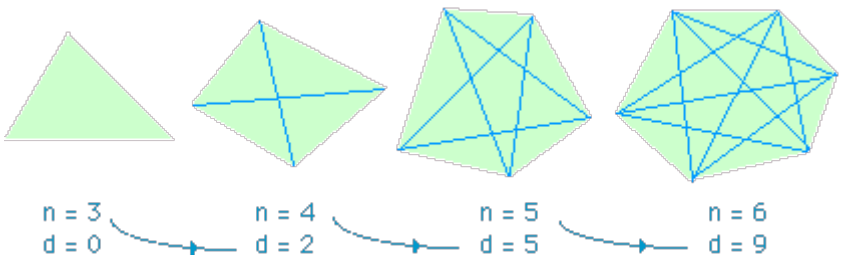
Le 10e ministre recevra 1036 pièces d'or.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, d_n est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets.

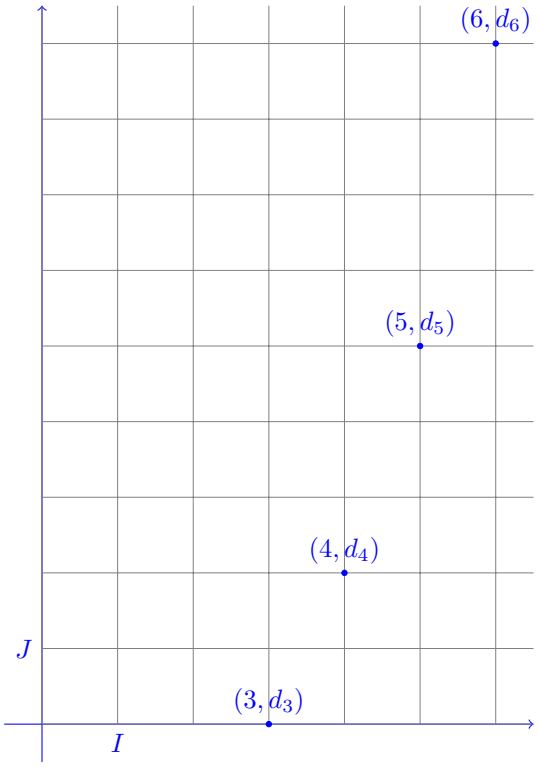


1.a. Pour chaque polygone convexe ci-dessus, déterminer son nombres de diagonales, puis compléter ce tableau :
Voici quelques schémas pour illustrer le comptage des diagonales :



n	3	4	5	6
d_n	0	2	5	9

b. Dans un repère, quelle est l'allure du nuage de points représentant la suite (d_n) ?



c. On admet alors qu'il existe deux réels a et b tels que $d_n = an^2 + bn$.
Déterminer a et b.
Si on suppose que $d_n = an^2 + bn$, alors cette relation est vraie pour toute valeur de n et en particulier pour $n = 3$ ou $n = 4$. Cela donne

$$\begin{cases} d_3 = a \times 3^2 + b \times 3 \\ d_4 = a \times 4^2 + b \times 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 9a + 3b \\ 2 = 16a + 4b \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues. On va résoudre ce système *par combinaisons linéaires*. Avant de commencer, on va le réécrire comme suit (en numérotant les lignes) :

$$\begin{cases} 9a + 3b & = 0 \quad (1) \\ -16a + 4b & = 2 \quad (2) \end{cases}$$

On va éliminer la variable b.

$$\begin{cases} 9a + 3b & = 0 \quad \times \mathbf{4} \\ 16a + 4b & = 2 \quad \times \mathbf{(-3)} \end{cases}$$

On additionne les deux équations ensemble pour obtenir une équation avec une seule variable en a.

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 36a + 12b & = 0 \\ -48x + (-12b) & = -6 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -12a = -6 \end{array}$$

On résoud l'équation en une variable.

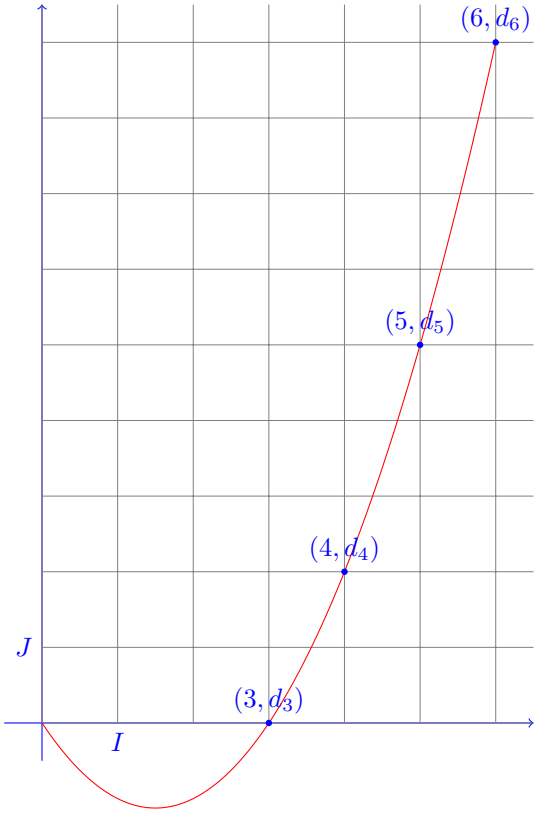
$$a = \frac{-6}{-12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

On substitue la valeur de a obtenue dans une des deux équations du système d'origine et on résoud pour

trouver l'autre variable b.

$$\begin{aligned} 9a+3b=0 &\Leftrightarrow 9\times\frac{1}{2}+3b=0\\ &\Leftrightarrow \frac{9}{2}+3b=0\\ &\Leftrightarrow 3b=-\frac{9}{2}\\ &\Leftrightarrow b=-\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow b=-\frac{9}{2\times 3}\\ &\Leftrightarrow b=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent, les valeurs de a et b sont respectivement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{2}$, et on a donc, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, $d_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$. En traçant la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ sur le graphe précédent, on a



2.a. Combien de nouvelles diagonales sont crées lors de l'ajout d'un sommet au polygone convexe ?
En partant d'un polygone convexe à n côtés, en ajoutant un sommet, on ajoute $n-1$ diagonales au polygone à n cotés, pour obtenir un polygone $n+1$ côtés.

b. En déduire, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n.
Il faut tout simplement traduire la phrase précédente en équation mathématique. On a donc, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$:

$$d_{n+1}=d_n+(n-1)$$

c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question **1.c.** par récurrence. Eh oui, encore une nouvelle récurrence... On ne pourra pas dire que vous ne vous êtes pas entrainés...

Enoncé : Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, $d_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$.

Démonstration :

• Ecriture de la propriété : Soit un entier $n\geqslant 3$. On note $\mathcal{P}(n)$: « $d_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$ ».

• Initialisation : Soit $n = 3$ (eh ouais, ici le premier rang ici, c'est $n = 3$ et pas $n = 0$, ou 1 ou 2...).
D'une part, $d_3 = 0$.
D'autre part, $\frac{1}{2} \times 3^2 - \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$.
On a donc bien montré que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathcal{P}(k)$ pour un certain entier naturel k supérieur ou égal à 3 ; autrement dit $\mathcal{P}(k)$: « $d_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k$ ».
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(k+1) \ : \ \text{« } d_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{3}{2}(k+1) \text{ »}$$

(ou encore, en développant « $d_{k+1} = \frac{k^2 - k - 2}{2}$ »).

• Hérédité :

$$\begin{aligned}
d_{k+1} &= d_k + (k-1) \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + (k-1) \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + (k-1) \times \frac{2}{2} \\
&= \frac{k^2 - 3k + 2(k-1)}{2} \\
&= \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} \\
&= \frac{k^2 - k - 2}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathcal{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie ».

• Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $d_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

Exercice 4

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
On veut afficher la liste des 100 premiers termes à l'aide de Python à l'aide de la commande `append`.

1. On considère l'algorithme suivant

```
>>> poop = ['JUL', 'SCH', 'Gims']
>>> poop.append('PNL')
>>> print(poop)
```

Que renvoie-t-il ?
L'algorithme renvoie :

```
['JUL', 'SCH', 'Gims', 'PNL']
```

2. Ecrire une fonction Python qui renvoie le terme de rang N de la suite (u_n).
On veut seulement le N-ième pas la liste des N premiers termes... Voici une proposition d'algorithme :

```
N= # Entrer un entier
for i in range(N):
    U=0
    U=2*U+1
print(U)
```

Il faut bien penser à enlever l'indentation pour le `print(U)` sinon il va donner la valeur de U à chaque étape...

3.a Recopier et compléter le script suivant

```
def liste_termes(N):
    L=[0]
    for i in range(1,N):
        L.append(          )
    return L
```

Voici ce qu'il fallait écrire pour compléter l'algorithme :

```
def liste_termes(N):
    L=[0]
    for i in range(1,N):
        L.append(2*L[i-1]+1)
    return L
```

b. Quelle instruction écrire dans la console pour obtenir la liste des 100 premiers termes de la suite (u_n) ?
Il faut tout simplement écrire :

```
>>> liste_termes(100)
```