

# Corvée n°1

## Suites numériques et récurrence - Terminale Spécialité Mathématiques

A rendre le : 21/09/2020

### Encouragements

*Avant de commencer ce devoir, rappelez-vous que toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

*« Tu vois, le monde se divise en deux catégories, ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent. Toi tu creuses. »*

Le bon, la brute et le truand, Blondin à Tuco, 1966.

### Exercice 1

En 2020, une ville compte 5000 habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que, chaque année :

- 20% des habitants de la ville meurent ou quittent la ville ;
- 1200 personnes naissent ou emménagent dans la ville.

On note  $u_n$  le nombre d'habitants (exprimé en milliers) l'année 2020 +  $n$ .

1. Expliquer pourquoi  $u_0 = 5$ .
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,8u_n + 1,2$ .
3. En utilisant la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et démontrer la conjecture par récurrence.
- 4.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 6$ .  
b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

### Exercice 2

Un roi distribue des pièces d'or à ses ministres :

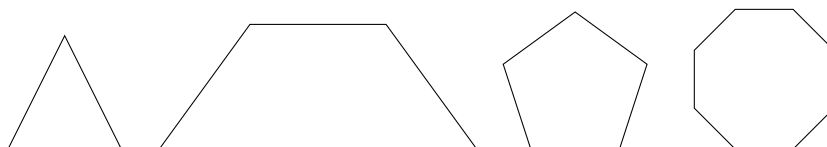
- au premier ministre, il donne cinq pièces ;
- au second ministre, il donne le double du premier moins deux pièces ;
- au troisième ministre, il donne le double du second moins trois pièces ;
- et ainsi de suite ...

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $a_n$  le nombre de pièces d'or distribuées au  $n$ -ième ministre.

1. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $a_n = 2^n + n + 2$ .
3. Combien de pièces d'or recevra le 10<sup>e</sup> ministre ?

### Exercice 3

Pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $d_n$  est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à  $n$  sommets.



1.a. Pour chaque polygone convexe ci-dessus, déterminer son nombre de diagonales, puis compléter ce tableau :

$n$	3	5	5	6
$d_n$	0			

- b. Dans un repère, quelle est l'allure du nuage de points représentant la suite  $(d_n)$  ?
- c. On admet alors qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $d_n = an^2 + bn$ . Déterminer  $a$  et  $b$ .
- 2.a. Combien de nouvelles diagonales sont créées lors de l'ajout d'un sommet au polygone convexe ?
- b. En déduite, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , l'expression de  $d_{n+1}$  en fonction de  $d_n$ .
- c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 1.c. par récurrence.

#### Exercice 4

On donne la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .  
On veut afficher la liste des 100 premiers termes à l'aide de Python à l'aide de la commande `append`.

1. On considère l'algorithme suivant

```
>>> poop = ['JUL', 'SCH', 'Gims']
>>> poop.append('PNL')
>>> print(poop)
```

Que renvoie-t-il ?

2. Ecrire une fonction Python qui renvoie le terme de rang  $N$  de la suite  $(u_n)$ .

3.a Recopier et compléter le script suivant

```
def liste_termes(N):
    L=[0]
    for i in range(1,N):
        L.append( )
    return L
```

b. Quelle instruction écrire dans la console pour obtenir la liste des 100 premiers termes de la suite  $(u_n)$  ?

