Notes sur les spectaèdres

M. Mohamed Nassiri

Résumé

Nous connaissons tous les polyèdres, et particulièrement les polyèdres dit *platoniciens*. En réalité, ils ne sont qu'une minuscule sous-catégorie d'objets mathématiques plus complexes : *les spectraèdres*. L'analyse matricielle nous délivre un nouveau secret : celui de la généralisation de la géométrie euclidienne.

2020

1 Introduction

1.1 Préliminaires

Avant de démarrer, il est important d'avoir en tête ces quelques petits résultats pour la suite

Définition 1.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ x^T M x > 0$.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ x^T M x \geqslant 0$.

Théorème 2. Critère de Sylvester
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la matrice extraite $M_k = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in M_k(\mathbb{R})$. Alors
M est définie positive si et seulement si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(M_k) > 0$.

Lemme 3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Considérons sa représentation sous forme de blocs :*

$$M = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées de taille $k \times k$ et $(n-k) \times (n-k)$ respectivement, et C une matrice rectangulaire $(n-k) \times k$.
Alors les matrices B et D sont symétriques définies positives

Démonstration. Soit y un vecteur non nul de dimension k, $y^T = (y_1, \ldots, y_k)$, et soit $x^T = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$. Alors $y^T B y = x^T A x > 0$. La preuve pour la matrice D est analogue. □

1.2 Définitions et notations

Le mot *spectraèdre* est une contraction du mot "*spectre*" (*spectra*), évoquant les valeurs propres d'une matrice, avec "*èdre*" (*hedra*), suggérant que les spectraèdres sont une généralisation des polyèdres (convexes).

En notant $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques, on définit l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives comme suit

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid x^T M x \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

On introduit la notation suivante

$$M \succeq N \quad \Leftrightarrow \quad M - N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

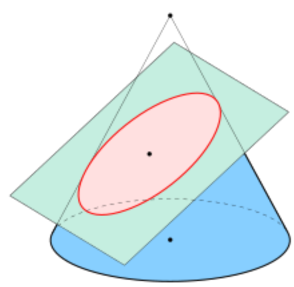
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un cône convexe fermé, appelé *cône des matrices symétriques semi-définies positives* (ou *cône semi-défini par* [$HEN10$]*)*

Un spectraèdre est l'intersection d'un espace affine avec ce cône convexe de matrices, et puisqu'un espace affine de matrices symétriques réels de dimension n peut être paramétré par

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \quad + x_n A_n$$

où $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A_0, ..., A_n$ sont des matrices symétriques réels, un spectrahèdre $\mathcal{S}$ peut donc être défini ainsi :

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \quad + x_n A_n \succeq 0\}$$



Si les matrices A_i sont de taille $n \times n$, on dit que S est un spectraèdre *de taille* n.

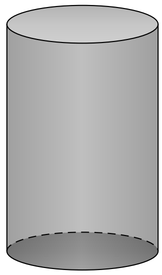
Remarque 4. *$A(x) \succeq 0$ est communément appelée une inégalité matricielle linéaire. Cette inégalité matricielle linéaire caractérise un ensemble convexe selon x.*

Comme les polyèdres, les spectrahèdres ont des *faces* délimitées par des hyperplans tangents, mais à la différence qu'ils peuvent en avoir une infinité. On définit également la notion de *sommet* et de *coté* pour un spectrahèdre.
Par conséquent, la relation d'Euler pour les polyèdres convexes (de genre 0, c'est-à-dire, intuitivement, un polyèdre « déformable en une sphère ») $s - a + f = 2$ (où s est le nombre de sommets, a est le nombre d'arêtes et f est le nombre de faces) n'est pas toujours vérifiée pour les spectraèdres.

2 Quelques exemples

2.1 Le cylindre

On peut écrire l'équation du cylindre comme suit



$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1\}$$

Le cylindre est un spectrahèdre puisque l'on peut le paramétrer par

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1+x & y & 0 & 0 \\ y & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

En effet, cette matrice est incontestablement définie positive au point $(x,y,z) = (0,0,0)$. Elle est semi-définie pour tous les points dans le cylindre.
Par ailleurs, en utilisant le critère de Sylvester et le **Lemme 3.**, les sous-matrices

$$\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1-z \end{pmatrix}$$

sont (symétriques) définies positives et donc :

$$\det \begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1-z \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant z \leqslant 1$$

On retrouve bien la paramétrisation classique du cylindre.

2.2 Le spectraèdre de Cayley (ou elliptope)

L'un des spectraèdres le plus connu et le plus simple est sans doute le *spectraèdre de Cayley*, noté $\mathcal{S}_C$.

$$\mathcal{S}_C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

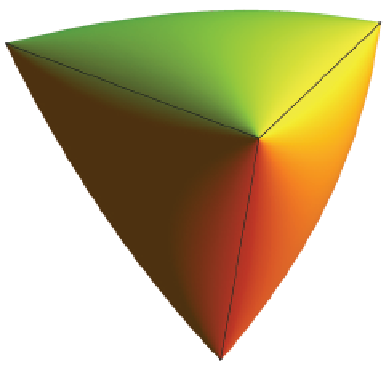
Cet ensemble ne peut pas être représenté en utilisant (un nombre fini) de cônes linéaires ou quadratiques.
Pour avoir une intuition géométrique, de $\mathcal{S}_C$, remarquons que

$$\det(A(x,y,z)) = -(x^2+y^2+z^2-2xyz-1)$$

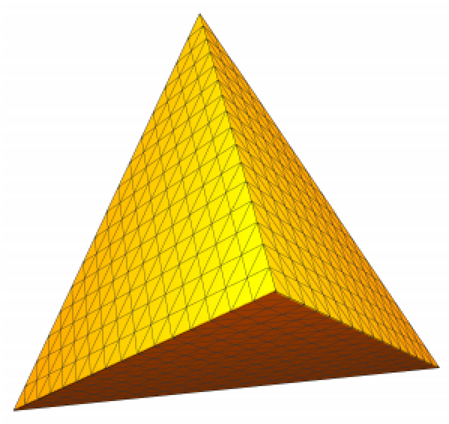
de sorte que la frontière de $\mathcal{S}_C$ peut être caractérisée par

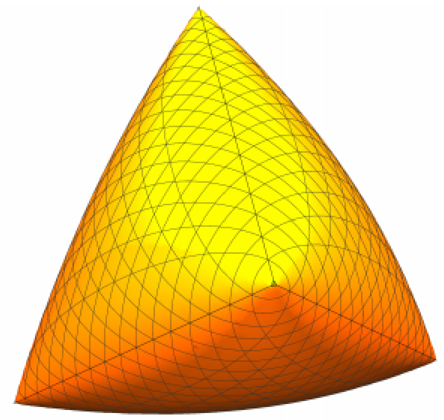
$$x^2+y^2+z^2-2xyz = 1$$

On obtient la figure suivante :



Il ressemble à un tétraèdre régulier. C'est en partie en cela où l'on dit que les spectraèdres sont une généralisation des polyèdres. Les illustrations de Joel A. Tropp dans [TRO13] permettent de s'en rendre compte.





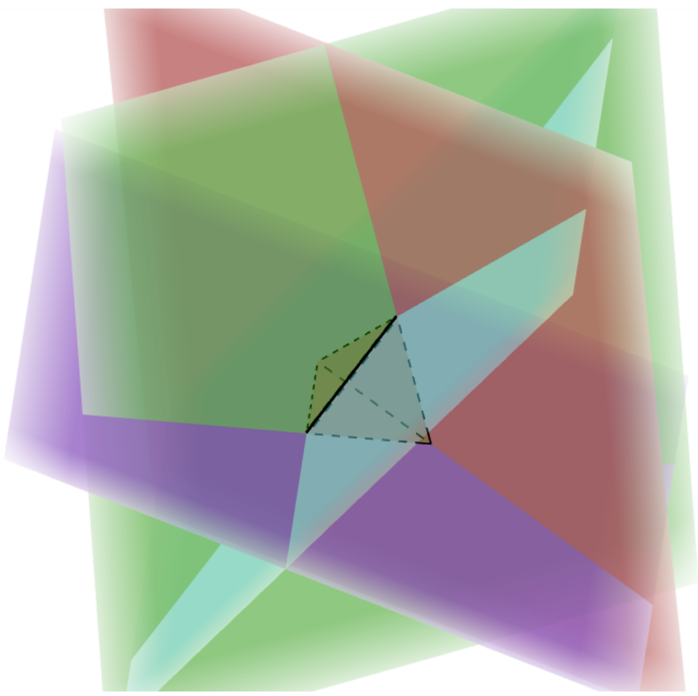
2.3 Les polyèdres

Les polyèdres sont des cas particuliers de spectraèdres. Un polyèdre peut être représenté par des intersections de différents hyperplans. Par exemple, un tétraèdre $\mathcal{T}$ peut avoir la représentation spectraédrique suivante :

$$\mathcal{T} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} l_1(x,y,z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4(x,y,z) \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

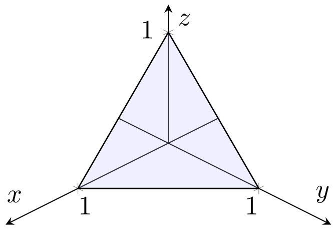
avec $l_i(x,y,z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$ pour $i \in \{1,2,3,4\}$ bien choisies.
En effet, on aura

$$\begin{cases} l_1(x,y,z) & = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \geqslant 0 \\ l_2(x,y,z) & = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \geqslant 0 \\ l_3(x,y,z) & = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \geqslant 0 \\ l_4(x,y,z) & = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 \geqslant 0 \end{cases}$$



2.4 Les spectraplexes

Les simplexes sont (déjà) une généralisation des triangles à une dimension quelconque. Plus précisement, on appelle *simplexe (standard) de* $\mathbb{R}^n$ l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points qui ne sont pas contenus dans un même hyperplan (affine). On définit également $\mathcal{S}$ le *simplexe standard de* $\mathbb{R}^n$ par



$$\mathrm{Simp}_n = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

La version spectrahédrale du simplexe est le *spectraplexe (standard)* et il est défini par

$$\mathrm{Spect}_n = \left\{ M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 1 \right\}$$

où $\mathrm{Tr}(M)$ est la trace de M.
Comme pour le simplexe, le spectraplexe est un ensemble compact, et il est considéré comme l'analogue "semi-fini" du simplexe.

2.5 Le "coussin" (*The "pillow"*)

On considère la matrice

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & y & 0 \\ 0 & y & 1 & z \\ x & 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble

$$\mathcal{P} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x,y,z) \geq 0 \right\}$$

$\mathcal{P}$ est un spectraèdre ressemblant à un « coussin ». La frontière de $\mathcal{P}$ est la surface définie par le déterminant

$$\det(Q(x,y,z)) = x^2(y-z)^2 - 2x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

[$ROST12$] donne l'illustration ci-contre de ce spectrahèdre.

3 Ouverture et applications

Même si les spectraèdres sont de très beaux ensembles convexes, ils ne sont pas utilisés que pour faire de jolies figures. On l'aura donc compris, un spectraèdre est modélisé par une inégalité matricielle linéaire ou communément appelée *LMI* (pour *Linear Matrix Inequality*). Il se trouve que l'on rencontre de nombreux problèmes d'optimisation en théorie du contrôle (étude du comportement de systèmes dynamiques paramétrés en fonction des trajectoires de leurs paramètres), en identification de système (technique de l'automatique consistant à obtenir un modèle mathématique d'un système à partir de mesures) et traitement du signal peuvent être formulés grâce à des LMI.
La plupart des problèmes qui ne peuvent pas être écrits en termes de LMI peuvent être structurées selon une forme plus générale connue sous le nom d'inégalité matricielle bilinéaire (*Bilinear Matrix Inequality - BMI*). Ce type d'inégalités est fondamentalement plus difficile que les LMI car l'ensemble des solutions des BMI est non-convexe. [1] Mais on s'égare...

Comprendre la géométrie des spectraèdres pourra nous permettre de mieux maîtriser et comprendre les LMI et leurs applications.

---

1. On a même encore une classe plus générale d'inégalités matricielles : les inégalités matricielles polynomiales (*Polynomial Matrix Inequality - PMI*). Mais en utilisant des changements de variables appropriés, les problèmes PMI peuvent être reécrits sous la forme d'un problème BMI.

Références

[$VIN16$] C. Vinzant, *What is a spectrahedron ?* Notices of the American Mathematical Society 61(5) (2014) pp. 492 - 494.
[$HNS19$] D. Henrion, S. Naldi, M. Safey El Din, *SPECTRA - a Maple library for solving linear matrix inequalities in exact arithmetic.* LAAS-CNRS Research Report 16375, November 2016. An extended version is published in Optimization Methods and Software, Vol. 34, Issue 1, pp. 62-78, 2019.
[$HEN11$] D. Henrion. *Les ovales des spectraèdres*, LAAS-CNRS Research Report 11078. Images des Mathématiques, CNRS (2011).
[$HEN10$] D. Henrion. *Les coupes des spectraèdres*, LAAS-CNRS Research Report 10810. Images des Mathématiques, CNRS (2010).
[$VORS13$] C. Vinzant, J.C. Ottem, K. Ranestad, B. Sturmfels, *Quartic spectrahedra.* Mathematical Programming, pp. 585-612. (2013).
[$TRO13$] J. A. Tropp, *Simplicial faces of the set of correlation matrices*, Discrete Comput Geom 60 (2018).
[$ROST12$] P. Rostalski, B. Sturmfels, *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry - Chap. 5 : Dualities*, SIAM (2012)
[$MT94$] : H.F. Miranda and R. C. Thompson, *Group majorization, the convex hulls of sets of matrices, and the diagonal element-singular value inequalities*, (1994).