Prodrome n°1 : Suites numériques et récurrence

Mohamed NASSIRI

Représenter - Chercher - Calculer - Raisonner - Communiquer

Avant de démarrer...
Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui est soit vraie, soit fausse.
Lorsqu'une propriété concerne un entier naturel n (ce qui sera souvent le cas dans ce chapitre), on peut la noter $\mathcal{P}(n)$.

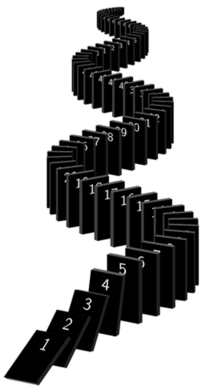
Le principe de la récurrence à l'aide des dominos

On compare très souvent le principe de la récurrence ou *principe des dominos*. Cependant, il faut bien comprendre toute l'analogie et la subtilité !
On considère une suite de dominos.

Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le premier tombe alors le second tombera, puis le troisième, ...etc..
Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont.

Tout repose en fait sur le *principe de propagation* : "si l'un tombe alors le suivant aussi". C'est une sorte de réaction en chaîne.



Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :
• **l'initialisation** : prouver que le premier domino tombe.
• **l'hérédité** : établir le principe : si le n-ième domino tombe alors le suivant (le numéro $n+1$) tombera.

Si on démontre ces deux choses alors la réaction se déclenche. Donc la propriété est démontrée pour tous les dominos ! Sauf qu'ici, un domino numéro n qui tombe est une propriété ou une formule vraie au rang n.

L'initialisation

Considérons la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Montrer que cette proposition est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Remarque
En fait, pour l'initialisation, il suffit seulement de vérifier la propriété au rang initial (très souvent $n = 0$ ou $n = 1$).

L'hérédité (ouais l'initialisation, c'est déjà fini)

On a montré que la relation pour (au moins) un n. On suppose donc que $\mathcal{P}(n)$ pour au moins un n. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. Ecrire la proposition $\mathcal{P}(n+1)$.

3. En remarquant que

$$1+2+\cdots+(n+1) = \underbrace{1+2+\cdots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)$$

Montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

> *Conclusion*
> Par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie (*i.e.*)
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

> *A raconter au prochain repas de famille*
> Surnommé le *Prince des mathématiciens*, Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777, Brunswick - 23 février 1855, Göttingen) étudia tous les domaines des mathématiques et contribua à développer la plupart des branches des sciences. La légende raconte que Gauss aurait trouvé seul (à l'âge de 9 ans !) la méthode de sommation des entiers $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Voici sa méthode :
>
> $$\begin{array}{r} + \begin{cases} S & = 1+2+3+...+98+99+100 \\ S & = 100+99+98+...+3+2+1 \end{cases} \\ \hline 2S = \underbrace{101+101+101+...+101+101+101}_{100 \text{ fois}} \end{array}$$
>
> On a donc
>
> $$2S = 100 \times 101 \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

L'importance de l'initialisation

Considérons la propriété $\mathcal{P}(n)$: 6 divise $7^n + 1$.
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ vraie (pour un certain n !)

4. Justifier qu'il existe k_n tel que $7^n + 1 = 6k_n$, avec $k_n \in \mathbb{Z}$.

5. Montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.

6.a. Vérifier la propriété $\mathcal{P}(n)$ au rang $n = 0$. Même question pour $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$. Que remarquez-vous ?
b. Proposer une explication à ce "problème" ?

> *Spoiler alert !*
> En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de n...
> Il faut donc bien comprendre que l'hérédité qui est un processus avant tout mécanique nécessite une amorce pour s'appliquer de proche en proche (effet dominos). Ici, nous avons montré que le processus mécanique marche mais non n'avons pas l'amorce...

