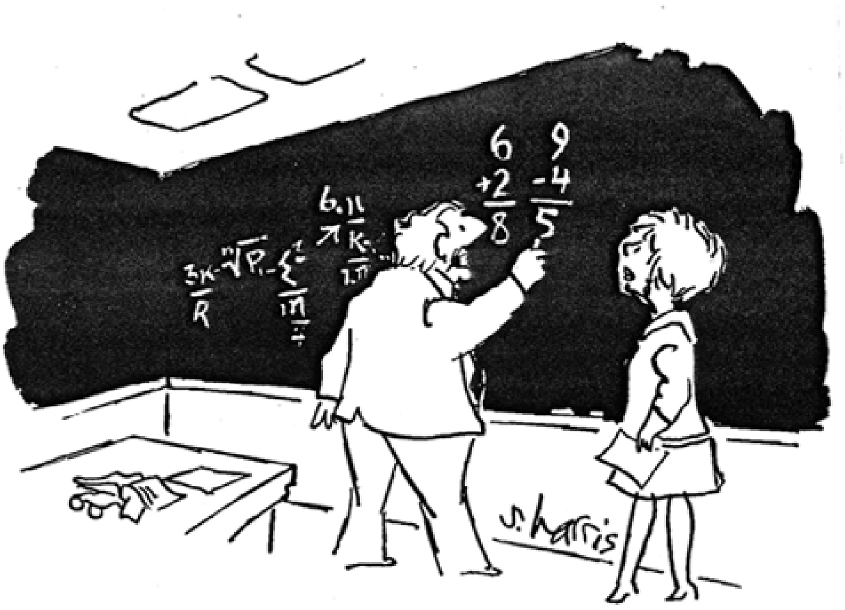

"EVERY ONCE IN A WHILE I JUST LIKE TO UNWIND WITH A LITTLE ADDITION AND SUBTRACTION."

« *La soustraction, ça n'existe pas !* »

M. Mohamed Nassiri

Résumé

« *La soustraction, ça n'existe pas !* » Quelle phrase percutante ! Catapultée de la sorte, cette phrase a immanquablement le même effet auprès des élèves, et même de certains professeurs : un électro-choc ! La note suivante explique cette phrase à l'aide de manipulations de symboles opératoires et de la théorie des groupes assaisonnés d'une pointe de « philosophie » sur les notions de *définition* et *existence*.

2020

1 « La soustraction, ça n'existe pas ! »

Bon ! Ça y est, la phrase est sortie, j'ai l'attention de mes élèves et la vôtre. Le point de départ de mon explication est le calcul suivant

$$5 - 3 = 5 + (-3)$$

Donc *soustraire*, ce n'est rien d'autre qu'*additionner avec des nombres négatifs.* C'est une évidence pour les enseignants de mathématiques, mais pas toujours pour les élèves. En tout cas, il est primordial, selon moi, d'expliquer aux élèves que cette opération n'en est pas réellement une. Je continue mon argumentation avec la question suivante :

Si maintenant j'écris ceci «_3_5 = 2 ». Quels symboles dois-je mettre pour que cette relation soit vraie ?

En général, ils tâtonnent puis finissent par trouver. En effet, il faut écrire $-3+5$. Ainsi, on comprend que le symbole « $-$ » *appartient* au 3 et non un symbole immobile et immuable de l'expression initiale « $5-3$ ».
En revanche, en réécrivant l'expression sous la forme $5 + (-3)$, on visualise nettement mieux le fait que le symbole « $-$ » appartienne au 3 mais surtout pourquoi il y a un « + » qui *débarque de nulle part* (dixit un de mes élèves) quand on écrit $5 - 3 = -3 + 5$.

Par ailleurs, voici ce que l'on peut trouver à ce sujet sur une des ressources d'Eduscol du Cycle 4 intitulé « *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs* » :

> « *L'introduction de la soustraction suppose que soient bien installées l'addition et la notion d'opposé, $a-b$ étant défini comme égal à $a+op(b)$. Il est alors possible d'interpréter le résultat d'une addition à trou comme la différence de deux nombres relatifs.*

L'un des nombreux, et sûrement le plus important, avantages de démasquer cette fausse opération qu'est la soustraction est son application au calcul littéral. En effet, quand il est demandé à des élèves de *regrouper les termes en x* d'une expression, comme par exemple :

$$6x + 6 - 2x + 5$$

Dans la majorité des cas, voici ce qu'il se passe :

$$6x + 2x - 6 + 5$$

Concentrés à « *déplacer les termes en x* », ils pensent que le symbole de la soustraction, au même titre que celui de l'addition, est un symbole « immobile »... Alors qu'en écrivant l'expression de la sorte

$$6x + 6 - 2x + 5 = 6x + 6 + (-2x) + 5$$

Comme précédemment, on comprend mieux pourquoi le symbole « $-$ » se *déplace* avec le $2x$...

2 Et la division ?

Pour la division, même combat ! Mais attention, on parle bien de l'obélus (le symbole de notre enfance « $\div$ ») et non de la division euclidienne qui est un algorithme de calcul ou encore du vinculum (la barre de fraction).
Comme illustration, je donne souvent l'exemple suivant :

$$5 \div 2 = 2,5 \textit{ et } 5 \times 0,5 = 2,5$$

Dans ce cas, à quoi sert la division si l'on obtient le même résultat par une multiplication ?

Inutile de vous préciser qu'à ce stade de mon petit exposé, les élèves sont bouches bées et les yeux exorbités : leurs lignes bougent...

Ici, c'est une histoire de fractions. En effet, le matheux aguerri aura remarqué que $5 \times 0,5 = 5 \times \frac{1}{2}$ et qu'ainsi le rapprochement est vite repéré :

$$5 \div 2 = \frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2}$$

3 Une histoire de groupes

Allez ! Pour le plaisir :

> *On appelle groupe la donnée d'un ensemble G et d'une loi de composition interne $\star$ sur G vérifiant les 3 propriétés suivantes :*
> • *la loi $\star$ est associative : pour tous $x, y, z \in G$, $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$;*
> • *il existe un élément $e \in G$ tel que, pour tout $x \in G$, $e \star x = x \star e = x$; e s'appelle l'élément neutre de G ;*
> • *pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x \star y = y \star x = e$; y s'appelle l'inverse de x et est noté x^{-1}.*
> *L'élément neutre du groupe et l'inverse d'un élément x sont uniques.*

Pour les plus érudits, on peut donc illustrer notre problème d'un point de vue « théorie des groupes » : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe additif (en fait c'est même un corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ mais bon...). Il n'y a effectivement pas de loi « $-$ ». Justement, on dit, toujours en considérant notre exemple $5 - 3$, que « -3 est l'inverse de 3 pour la loi $+$» [1].
Pour la division, là encore, il s'agit d'une histoire d'inverse par la loi « $\times$ » en considérant $(\mathbb{R}^*, \times)$ cette fois-ci comme un groupe multiplicatif...

4 Quelques remarques...

Au cours de quelques discussions, parfois joyeusement houleuses, sur le sujet de l'existence de la soustraction et de la division, j'ai souvent eu le droit à des remarques qui peuvent se résumer principalement en la phrase suivante : « *Mais bien sûr que la soustraction existe puisqu'on l'a défini !* » Alors, il y a deux réponses à apporter à ça.

Premièrement, quand je dis que « *La soustraction, ça n'existe pas !* », je ne dis pas qu'elle n'a jamais existé ou qu'elle n'est pas définie, mais plutôt qu'elle est inutile. L'avantage de cette phrase (« *La soustraction, ça n'existe pas !* ») c'est qu'elle créé un électro-choc (un pic d'attention) auprès des élèves et permet de capter leur attention durant tout le reste de l'explication.

Deuxièmement, « *définir* » quelque chose n'assure pas son existence. En effet, imaginons que je définisse un *éléphert* : il s'agit d'un éléphant vert (c'est une création personnelle). Je l'ai bien *défini* (je lui ai même donné un nom et pour certains vous avez peut-être même visualisé un éléphant de couleur verte). Mais est-ce pourtant qu'un éléphert *existe* ?
Il faut bien distinguer *définition* et *existence* (surtout) en mathématiques...

Références

[EDS16] : « *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs* », Ressource Eduscol - Cycle 4 (2016)
[BIB20] : « *Structure de groupes* », Bibm@ths.net (2020) :

1. Je n'ai pas dit que -3 était l'inverse de 3 ! $\frac{1}{3}$ est bel et bien l'inverse de 3... Mais en théorie des groupes, on précise la loi pour les inverses. Ainsi -3 était l'inverse de 3 pour la loi $+$ et $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3 pour la loi $\times$