Schibboleth I

20/12/2019

Calculatrice autorisée • Durée : 2h

« Joyeux Hunger Games, et puisse le sort vous être favorable ! »

Effie Trinket, Hunger Games, 2012.

I - Ensemble des nombres, intervalles, manipuler les nombres réels

Exercice 1 $\simeq$ 10 minutes

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est un entier naturel non nul le plus petit possible. **DETAILLER LES CALCULS !**

a. $\sqrt{63} = \sqrt{9\times 7} = \sqrt{9}\times\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

b. $\sqrt{425} = \sqrt{25\times 17} = \sqrt{25}\times\sqrt{17} = 5\sqrt{17}$

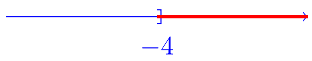
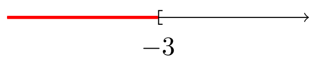
c. $\sqrt{75} - 2\sqrt{3} + \sqrt{108} = \sqrt{25\times 3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{36\times 3} = \sqrt{25}\times\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{36}\times\sqrt{3}$

$$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$= 9\sqrt{3}$$

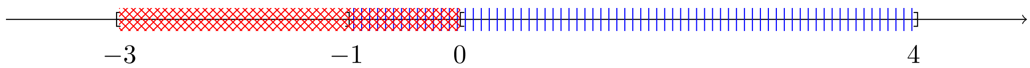
Exercice 2 $\simeq$ 15 minutes

1. Compléter le tableau suivant

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle
$-10 < x \leq 21$	 -10 21	$x \in]-10;21]$
$-2 \leq x < 4$	 -2 4	$x \in [-2;4[$
$2 < x < 8$	 2 8	$x \in]2;8[$
$x > -4$	 -4	$x \in]-4;+\infty[$
$x < -3$	 -3	$x \in]-\infty;-3[$

2. Déterminer la réunion **OU** l'intersection **demandée.**
Conseil : représenter les intervalles de deux couleurs différentes sur une droite graduée.

a. $[-3;0[\cap[-1;4]$



$$[-3;0[\cap[-1;4]=[-1;0[$$

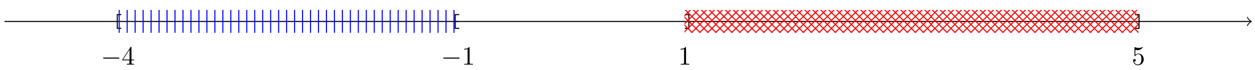
b. $]-\infty;1]\cup]-3;3[$

$$]-\infty;1]\cup]-3;3[=]-\infty;3[$$

c. $]1;4[\cap[4;9]$

$$]1;4[\cap[4;9]=\varnothing$$

d. $]-4;-1[\cup]1;5]$



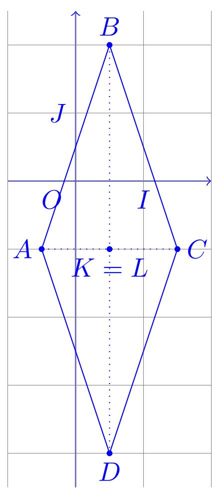
$$]-4;-1[\cup]1;5]=]-4;-1[\cup]1;5]$$

II - Repérage, coordonnées d'un point, milieu, distance

Exercice 3 $\simeq$ 15 minutes

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère les points $A(-\frac{1}{2};-1)$, $B(\frac{1}{2};2)$, $C(\frac{3}{2};-1)$ et $D(\frac{1}{2};-4)$.

a. Conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$
Le quadrilatère $ABCD$ semble être un losange.



b. Démontrer cette conjecture.
Pour démontrer cette conjecture, on peut utiliser une des deux propositions suivantes :

« Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange. »
« Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange. »

Selon moi, le plus simple est d'utiliser la deuxième proposition : on démontre que c'est un parallélogramme en calculant deux milieux, puis que c'est un losange en calculant deux longueurs. Allons-y !

• Montrons d'abord que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme :

Soit K le milieu du segment $[AC]$ et L le milieu du segment $[BD]$

$$x_K=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{-1+3}{2}}{2}=\frac{\frac{2}{2}}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad y_K=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-1+(-1)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1+1}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{2+(-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Les coordonnées du milieu du segment $[AC]$ sont $K(0,5;-1)$ et les coordonnées du milieu du segment $[BD]$ sont $L(0,5;-1)$. On remarque que les points K et L sont confondus (ils ont les mêmes coordonnées). Ainsi les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

• Montrons enfin que le parallélogramme $ABCD$ est un losange :

Pour ce faire, on va montrer que $AB = AD$.

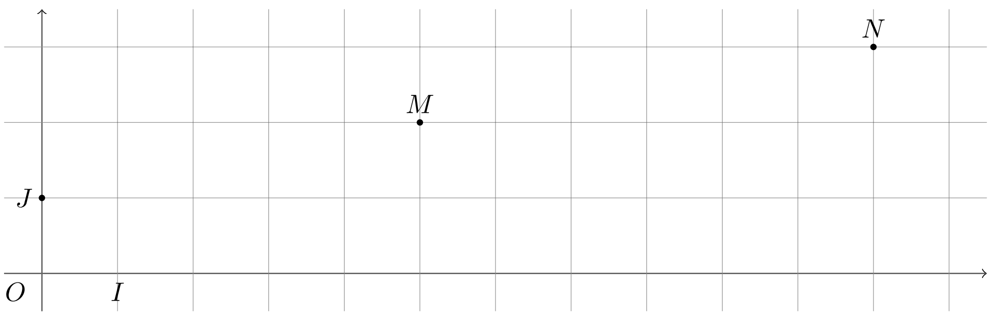
$$\begin{aligned} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (-4-(-1))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

On a donc bien $AB = AD$. Par conséquent, le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Exercice 4 $\simeq$ 15 minutes

Les points suivants J, M et N sont-ils alignés ? **JUSTIFIER !**



On commence par lire les coordonnées des points J, M et N. On a donc $I(0;1)$, $M(5;2)$ et $N(11;3)$.
Pour montrer que les points I, M et N sont alignés (ce n'est qu'une supposition !) dans cet ordre, il faut montrer que $JN = JM + MN$. Allons-y !

$$\begin{aligned} JN = \sqrt{(x_N - x_J)^2 + (y_N - y_J)^2} = \sqrt{(11-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{11^2+2^2} = \sqrt{121+4} &= \sqrt{125} \\ &= \sqrt{25 \times 5} \\ &= \sqrt{25} \times \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$JM = \sqrt{(x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(11-5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

On a d'une part,

$$JN = 5\sqrt{5} \simeq 11.1803398875$$

et d'autre part,

$$JM + MN = \sqrt{26} + \sqrt{37} \simeq 11.1817820439$$

Par conséquent, $JN \neq JM + MN$, et donc les points J, M et N ne sont pas alignés.

III - Multiples, diviseurs, nombres premiers

Exercice 5 $\simeq$ 10 minutes

Démontrer que 113 est un nombre premier.

Test de primalité
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si n n'admet pour diviseur aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

On prend la racine carré de 113 (qui vaut environ 10.63). Puis on regarde les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{113}$, c'est-à-dire : $2, 3, 5, 7$. Enfin, on regarde si ces 4 nombres premiers divisent 113 : ça n'est pas le cas ! Donc, d'après le test de primalité, on en déduit que 113 est premier.

Exercice 6 (*Exercice inspiré de Thomas Castanet, ChingAtome*) $\simeq$ 10 minutes

On souhaite montrer que $n^2 + n + 2$ est un nombre pair pour tout entier n ($n \in \mathbb{N}$). Pour cela, on décompose le raisonnement en deux étapes :

a. Montrer que $n^2 + n + 2$ est un nombre pair lorsque n est pair.
Puisque n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. Par suite,

$$n^2 + n + 2 = (2k)^2 + 2k + 2 = 4k^2 + 2k + 2 = 2(2k^2 + k + 1)$$

Or, comme $2k^2 + k + 1$ est un entier, on vient bien de montrer que si n est pair, alors $n^2 + n + 2$ est pair.

b. Montrer que $n^2 + n + 2$ est un nombre pair lorsque n est impair.
Puisque n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Par suite,

$$\begin{aligned} n^2 + n + 2 = (2k+1)^2 + 2k + 1 + 2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 + 2k + 3 &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 3 \\ &= 4k^2 + 6k + 4 = 2(2k^2 + 3k + 2) \end{aligned}$$

Or, comme $2k^2 + 3k + 2$ est un entier, on vient bien de montrer que si n est impair, alors $n^2 + n + 2$ est pair.

Ici, nous venons de raisonner par "disjonction de cas". On a démontré cette proposition pour les entiers pairs, d'une part, et les entiers impairs d'autre part. Or, puisque les entiers pairs et impairs forment tous les entiers, on a démontré la proposition pour tous les entiers, c'est-à-dire :

« Si n est un entier, alors $n^2 + n + 2$ est pair.»

IV - Représentations graphiques, résolution d'équations du type $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$

Exercice 7 $\simeq$ 10 minutes

Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou ni paires, ni impaires. **JUSTIFIER !**

a. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. La fonction f est donc paire.

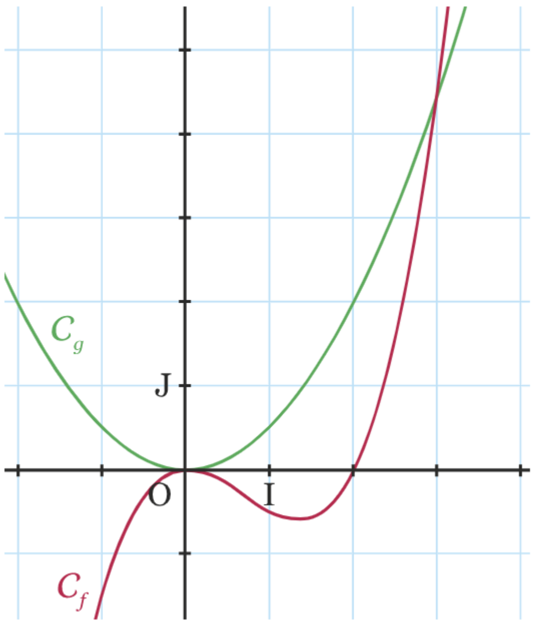
b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

$f(-x) = (-x)^2 - 3 \times (-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$. La fonction f n'est ni paire, ni impaire.

c. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \times (-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$. La fonction f est impaire.

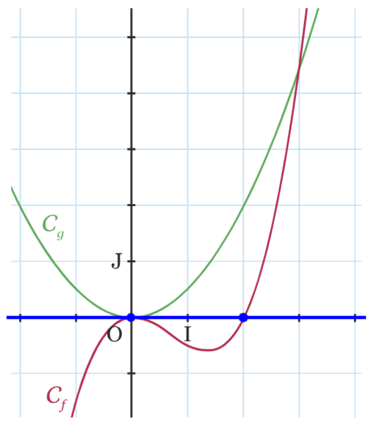
Exercice 8 $\simeq$ 10 minutes



Résoudre graphiquement les équations :

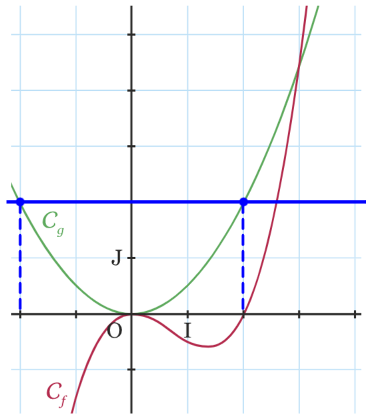
a. $f(x) = 0$

Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses). On trouve donc $x = 0$ et $x = 2$.



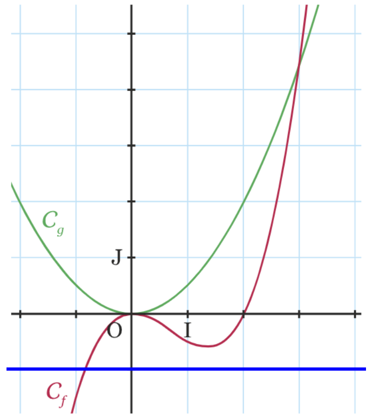
b. $g(x) = 2$

Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec la droite d'équation $y = 2$. On trouve donc $x = -1$ et $x = 2$.



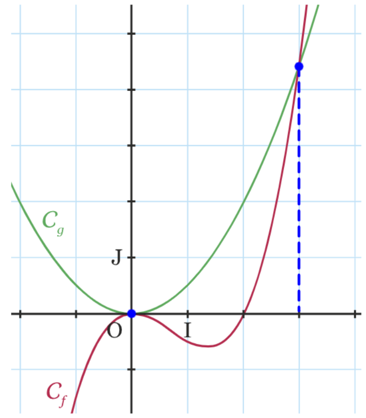
c. $g(x) = -1$

Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec la droite d'équation $y = -1$. On remarque qu'il n'y a pas d'intersection ! L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \varnothing$.



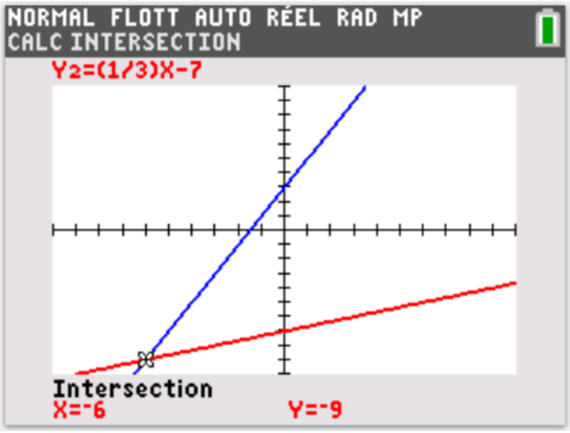
d. $f(x) = g(x)$

Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la courbe $\mathcal{C}_g$. On trouve donc $x = 0$ et $x = 3$.



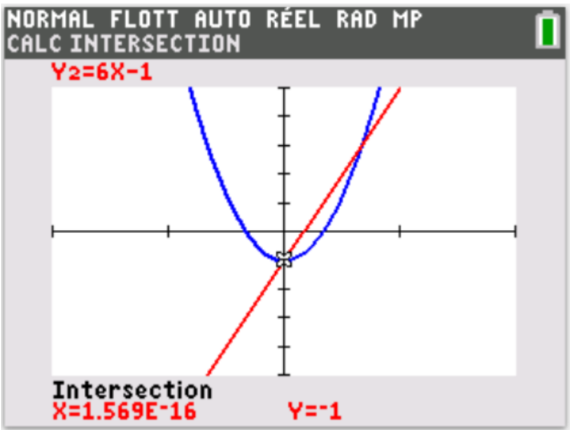
2. Dans chacun des cas suivants, conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, **PUIS** résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

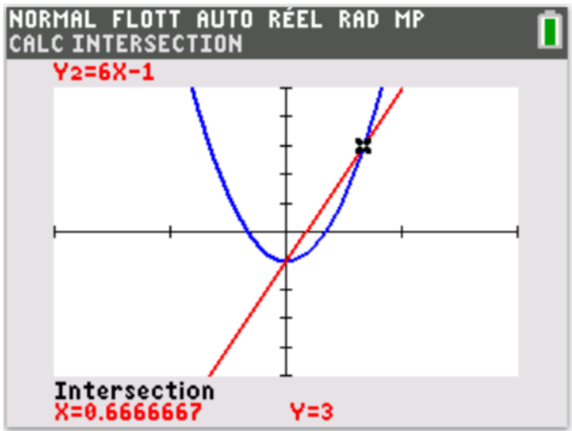
a. $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{3}x - 7$



$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\Leftrightarrow\ & 2x + 3 = \frac{1}{3}x - 7 \\
\Leftrightarrow\ & 2x + 3 - 3 = \frac{1}{3}x - 7 - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x - 10 - \frac{1}{3}x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x \times 3}{1 \times 3} - \frac{1}{3}x = -10 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{6x}{3} - \frac{x}{3} = -10 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{6x - x}{3} = -10 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{5x}{3} = -10 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{5x}{3} \times 3 = -10 \times 3 \\
\Leftrightarrow\ & 5x = -30 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{-30}{5} = -6
\end{aligned}$$

b. $f(x) = 9x^2 - 1$ et $g(x) = 6x - 1$





$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) \Leftrightarrow 9x^2 - 1 = 6x - 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 1 + 1 = 6x - 1 + 1 & \Leftrightarrow 9x^2 = 6x \\
& \Leftrightarrow 9x^2 - 6x = 6x - 6x \\
& \Leftrightarrow 9x^2 - 6x = 0 \\
& \Leftrightarrow 3x(3x - 2) = 0
\end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, on en déduit que :
- soit $3x = 0$ et donc $x = 0$;
- soit $3x - 2 = 0$ et donc $x = \frac{2}{3}$.

Exercice 9 ≃ 15 minutes

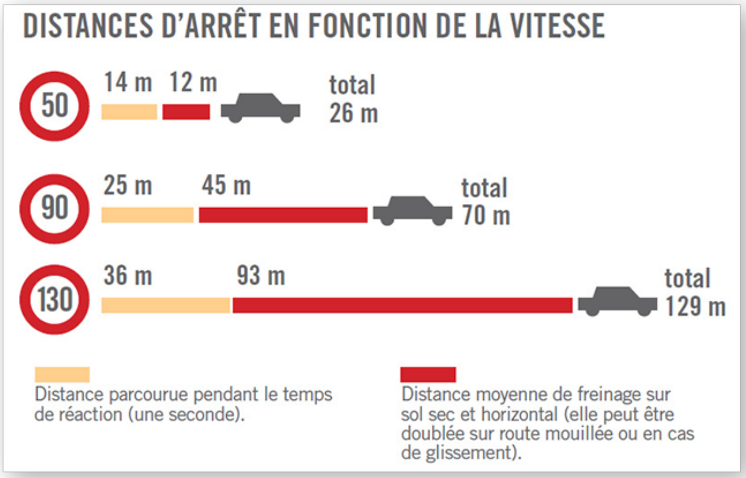
Pour calculer la distance d'arrêt A d'une voiture (en m), on applique la formule :

$$A = R + F$$

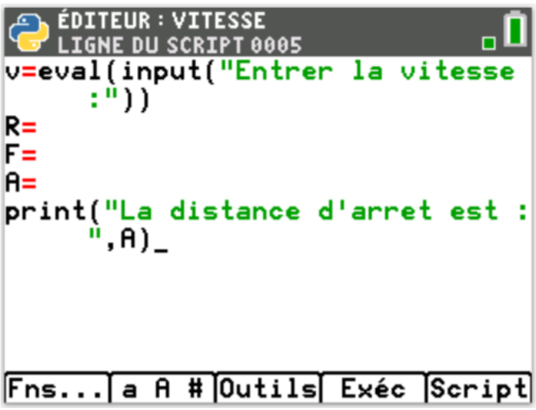
où
- R est la distance parcourue (en m) pendant le temps de réaction du conducteur,
- F est la distance parcourue (en m) pendant le temps de freinage.

Si V est la vitesse initiale du véhicule (en km/h), on admet que :

$$R = \frac{V}{3} \quad \text{et} \quad F = \frac{V^2}{200}$$



Visuel extrait de la brochure « Comment réduire les risques au volant ? » Associations Prévention Routière & Attitude Prévention – Réalisation L'Agence Verte.

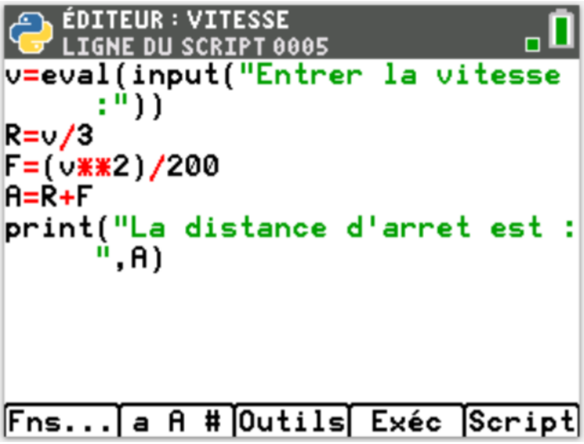


Questions :

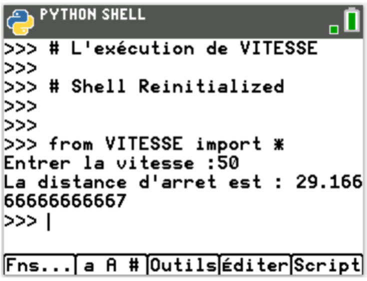
1. Expliquer brièvement l'intérêt de la commande **eval**

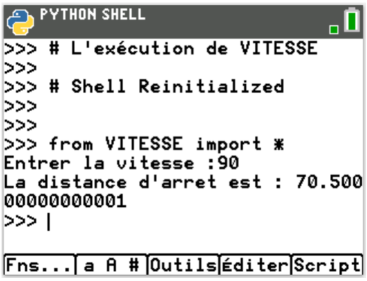
Cela vient du fait que, quand vous rentrez une valeur par le biais de la commande **input**, Python considère que cette valeur (qui pourtant est un nombre !) est une chaîne de caratères (un mot si vous préférez). Donc en mettant la commande **eval** devant, on force Python à faire en sorte que notre variable soit évaluer comme un nombre (et comme ça, il peut faire des calculs avec !)

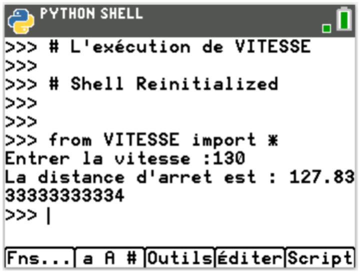
2. Compléter l'algorithme ci-contre qui permet calculer la distance de freinage d'un véhicule.



3. Tester cet algorithme avec les vitesses 50km/h, 90km/h et 130km/h, et retrouver les valeurs des distances de freinage de la brochure.







Exercice 10

$\simeq$ 10 minutes

Un bureau de change applique une commission en fonction du montant que l'on souhaite échanger :
- si le montant à échanger est inférieur à 50€, le bureau de change applique une commission de 12€,
- sinon, elle applique une commission de 8€.

Exemple : *Monsieur Eiffel souhaite se rendre à New York et veut échanger 200€. Voici comment se déroule le change :*

200€-8€=192€

Puis, comme 1€=1,11$ (dollar américain), alors

192€×1,11=213,12$

Donc Monsieur Eiffel repart avec 213,12$.

Question : Ecrire un programme en Python qui demande à un utilisateur de rentrer le montant à échanger et qui le convertit en dollar américain selon les modalités du bureau de change.

Aide : Vous aurez notamment besoin de la commande **input**.

Voici le programme que je vous propose :

```
euro=eval(input("Entrer le montant en euros à échanger :"))
if euro<50:
    dollar=(euro-12)*1.11
else:
    dollar=(euro-8)*1.11
print("Cela correspond à", dollar,"dollars américain")
```