Informations chiffrées, évolutions

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

- Calculer des proportions et des pourcentages.
- Manipuler les pourcentages de pourcentages.
- Utiliser les coefficients multiplicateurs.
- Calculer des taux d'évolutions.
- Connaissant deux taux d'évolutions successifs, déterminer le taux d'évolution global.
- Connaissant un taux d'évolution, déterminer le taux d'évolution réciproque.

Mots – clefs :

Proportions - Pourcentages - Pourcentages de pourcentages - Coefficients multiplicateurs - Taux d'évolutions - Taux d'évolutions successifs - Taux d'évolution global - Taux d'évolution réciproque

Prérequis :

Nombres réels - Fractions - Notion d'ensemble et de quantité - Notions élémentaires de pourcentage

𝄞 *La musique du chapitre : Demon - You are my high. Album : Midnight Funk - Date de sortie : 1999.*

Le monde dans lequel nous vivons regorge d'informations chiffrées : proportions, pourcentages, taux d'évolution, etc. Il est donc essentiel de bien comprendre et maîtriser ces informations ! Un exemple très simple (et utile dans la vie de tous les jours !) :

Imaginons que je sois en train de faire les soldes. Un jean m'intéresse et il est à 120€ avec une remise de 50%*. Le vendeur me dit « Attendez la prochaine démarque, il sera soldé à* 30% *en plus des* 50%*.*

A votre avis, quelle est donc la remise totale ? 80% ? Pas du tout ! La remise totale est de 65% ... Nous verrons dans ce chapitre comment cela est possible avec ce que l'on appelle les taux d'évolutions successifs. Un autre exemple tout aussi déroutant :

Je suis un instagrammeur influent : 500 000 followers. Un jour, le badbuzz : je prétends que La Terre est plate et que personne n'a été sur La Lune. Internet me ridiculise et je perds 40% *de mes abonnés... Les marques qui me sponsorisent font pression sur moi en me disant de m'excuser, de m'expliquer et de regagner mes 500 000 followers.*

A votre avis, quel est le pourcentage à appliquer pour ré-atteindre les 500 000 followers ? 40% ? Encore une fois non ... Il faut environ 67%. Nous verrons également dans ce chapitre comment cela est possible avec ce que l'on appelle les taux d'évolutions réciproques.

Certains individus jouent du fait qu'un grand nombre de personnes ne comprennent pas les subtilités et pièges des pourcentages pour les flouer... N'en faites pas partie !

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

John von Neumann

---

1 Pourcentage et proportion

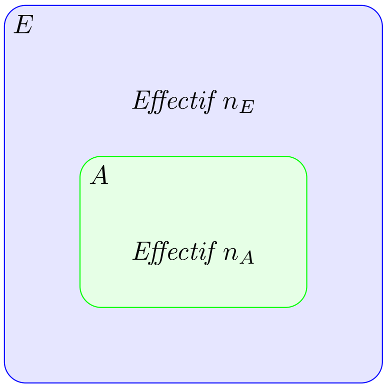
1.1 Proportion

Rappel

Soit t un nombre positif. Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est le multiplier par $\frac{t}{100}$.
Exemple : Prendre 4% de 120€, c'est faire 120€ $\times \frac{4}{100} = 4,80$€.

Définition 1 *Soient E un ensemble de référence non vide et n_E le nombre d'éléments de E.*
Soient A une partie de E et n_A le nombre d'éléments de A.
La **proportion** *p de A dans E est le réel défini par*

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$



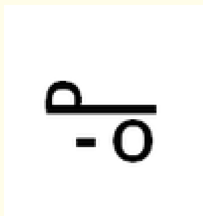
Remarque

On peut exprimer une proportion sous forme décimale, sous forme de fraction ou encore sous forme de pourcentage.

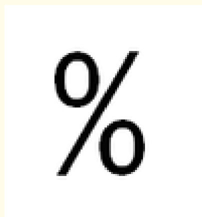
Un peu d'histoire

À l'origine, les traités mathématiques en latin n'étaient pas notés à l'aide de chiffres et de symboles, mais uniquement en mots. Ainsi, l'expression de la fraction 1/100 s'écrivait *unu per cento*.
Plus tard, vers 1425, cette écriture fut simplifiée, en plaçant un P couché sur le *cento*.
Dès 1650, les traités abrégèrent également cento, ne gardant que le o final, ce qui donnait une forme presque similaire au % actuel, avec une barre horizontale au lieu de diagonale.
Dès le début XVIIIe siècle, le % gardera sa forme actuelle

La notation "%" au XVe siècle, abréviation de per cento.



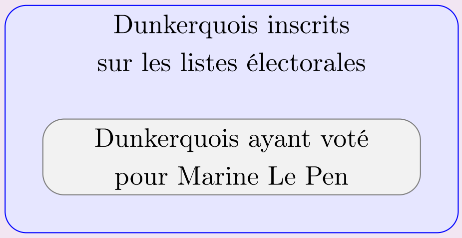
La notation "%" au XVIIe siècle, il ne reste que le o de cento.



La notation "%" dès le XVIIIe siècle, notez la barre diagonale.

Exemple

A Dunkerque, à l'élection présidentielle de 2017, sur les 62852 inscrits sur les listes électorales, 28648 personnes ont voté pour Marine Le Pen. La proportion de votants pour Marine Le Pen est donc $p = \frac{28648}{62852} = 0,4558$. Il y a donc $45,58\%$ des dunkerquois inscrits sur les listes électorales qui ont voté pour Marine Le Pen.



Exercice

On s'intéresse à la composition d'une tablette de chocolat de 180g.

1. Elle comporte 72% de sucre : quelle proportion (en pourcentage) cela représente-t-il ?

2. Le cacao[1] constitue 55% de la tablette : quelle masse cela représente-t-il ?

[1] *"90% de la production mondiale de cacao proviennent de 7 pays. L'Afrique produit les trois quarts du cacao mondial. Près de 40 millions de personnes dépendent de la culture du cacao pour vivre.*

A raconter au prochain repas de famille

• L'eau recouvre plus de 72% de la surface de la Terre mais ne représente que 0.006% de sa masse.

• La probabilité de mourir assassiné est bien plus élevée que celle de mourir d'un accident d'avion (la première est de 1 sur 20 000 et la seconde, de 1 sur 25 millions).

Proposition 2 *Pour tout ensemble A contenu dans un ensemble non vide E, on a :*

$$0 \leq p \leq 1$$

Démonstration

• On a $n_A \geq 0$ et $n_E > 0$.

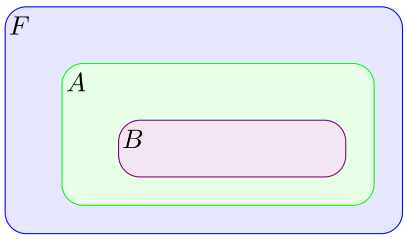
Or le quotient de deux réels positifs et encore positif, d'où $\frac{n_A}{n_E} \geq 0$, et donc $p \geq 0$.

• A étant une partie de E, on a $n_A \leq n_E$ d'où $\frac{n_A}{n_E} \leq 1$ et donc $p \leq 1$.

□

1.2 Pourcentage de pourcentage

Proposition 3 *Soient F un ensemble de référence non vide, A une partie non vide de F et B une partie de A.*
Si p_1 est la proportion de A dans F, et si p_2 est la proportion de B dans A alors la proportion de B dans F est $p = p_1 \times p_2$.



Démonstration

Soient F un ensemble de référence non vide et n_F le nombre d'éléments de F. A une partie non vide de F contenant n_A éléments et B une partie de A contenant n_B éléments. On a donc $n_A \neq 0$ et $n_B \neq 0$.

- Si p_1 est la proportion de A dans F, alors $p_1 = \frac{n_A}{n_F}$
- Si p_2 est la proportion de B dans A, alors $p_2 = \frac{n_B}{n_A}$
- Si p est la proportion de B dans F, alors $p = \frac{n_B}{n_F}$

Par ailleurs,

$$p_1 \times p_2 = \frac{n_A}{n_F} \times \frac{n_B}{n_A} = \frac{n_A \times n_B}{n_F \times n_A} = \frac{\cancel{n_A} \times n_B}{n_F \times \cancel{n_A}} = \frac{n_B}{n_F} = p$$

□

Attention !

Pour utiliser la formule précédente ($p = p_1 \times p_2$), on utilise des proportions sous forme décimale ou sous forme de fraction mais **JAMAIS** sous forme de pourcentage !

Exemple

Dans un lycée de 800 élèves : 25% des élèves sont en Seconde ; 45% des élèves de Seconde sont des filles.
La part des filles de Seconde dans le lycée est :

$$\frac{25}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{1125}{10000} = \frac{11,25}{100} = 11,25\%$$

Exercice

50% des foyers français possèdent au moins un animal de compagnie, et pour 20% de ces foyers, il s'agit d'un chat.
Quelle proportion des ménages français possèdent au moins un chat comme animal de compagnie ? Exprimer le résultat sous forme d'un pourcentage.

2 Taux d'évolution

2.1 Variation absolue et variation relative

Dans tout ce qui va suivre, on va noter V_D une **v**aleur de **d**épart pour une quantité quelconque qui va varier pour atteindre une **v**aleur d'**a**rrivée V_A.

Définition 4 *La* **variation absolue ΔV** *est donnée par :*

$$\Delta V = V_A - V_D$$

La **variation relative** *(ou* **taux d'évolution***) t est le quotient de la différence entre V_A et V_D par V_D. Elle est donnée par*

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

Remarque
Les variations absolues et relatives peuvent être positives ou négatives : si la quantité augmente, les variations absolue et relative sont positives, sinon elles sont négatives.

Exemple
Nabilla avait 350 neurones (le nombre total de neurones du cerveau humain est estimé de 86 à 100 milliards.) avant les Anges de la Téléréalité 4. A la fin de l'émission, elle n'en possédait plus que 46.
On a $V_D = 350$ et $V_A = 46$ et ainsi

$$V_A - V_D = 46 - 350 = -304$$

La variation absolue est donc de -304.
Par ailleurs, on a

$$\frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{46 - 350}{350} \simeq -0,87$$

Le taux d'évolution (en pourcentage) est de -87% (soit donc une perte de 87% de sa matière grise).

Exercice
Un employé a été payé 2198€ par mois durant l'année 2015. Il était payé 1788€ lors de l'année précédente.
Quelle est la variation absolue de son salaire entre ces 2 années ?
Quel est le taux d'évolution de son salaire entre ces 2 années ? On arrondira le résultat à $0,1\%$ près.

2.2 Coefficient multiplicateur

Proposition 5 *Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_D à V_A. On a alors :*

$$V_A = (1+t)V_D$$

Démonstration
D'après la définition du taux d'évolution t, pour $V_D \neq 0$, on a $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$. D'où

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \Leftrightarrow t \times V_D = V_A - V_D \Leftrightarrow t \times V_D + V_D = V_A$$
$$\Leftrightarrow (t+1) \times V_D = V_A$$

□

Définition 6 $1+t$ *est appelé* **coefficient multiplicateur** *associé au taux d'évolution t. On pourra le note CM.*

Proposition 7 *Dans le cas d'une baisse, t est négatif et CM est un réel compris entre 0 et 1.*
Dans le cas d'une augmentation, t est positif et CM est un réel supérieur à 1.

Démonstration

D'après la définition du taux d'évolution t, pour $V_D \neq 0$, on a $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$.
• (On ne démontrera que $CM \leq 1$ Dans le cas d'une baisse, on a

$$V_A \leq V_D \Leftrightarrow V_A - V_D \leq \cancel{V_D} - \cancel{V_D} \Leftrightarrow \frac{V_A - V_D}{V_D} \leq \frac{0}{V_D} \Leftrightarrow \underbrace{1 + \frac{V_A - V_D}{V_D}}_{=CM} \leq 1 \Leftrightarrow CM \leq 1$$

• Dans le cas d'une hausse, on a

$$V_A \geq V_D \Leftrightarrow V_A - V_D \geq \cancel{V_D} - \cancel{V_D} \Leftrightarrow \frac{V_A - V_D}{V_D} \geq \frac{0}{V_D} \Leftrightarrow \underbrace{1 + \frac{V_A - V_D}{V_D}}_{=CM} \geq 1 \Leftrightarrow CM \geq 1$$

□

Exemple

• Calculons le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 18% :

$$k = 1 + \frac{18}{100} = 1 + 0,18 = 1,18$$

Le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation de 18% est 1,18.

• Trouvons la variation en pourcentage correspondant au coefficient de 0,85.
$k = 0,85$ donc $t = 1 - k = 1 - 0,85 = 0,15$ soit 15%.
Comme $k \leq 1$, on a une diminution de 15%.

Exercice

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à :
– une diminution de 25% ;
– une augmentation de 14% ;
– une diminution de 38% ;
– une augmentation de 50%.
2. Donner la variation en pourcentage correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants :
0,994 ; 1,003 ; 0,825 ; 1,04.

3 Evolutions successives et réciproques

3.1 Evolutions successives

Définition 8 *Lorsqu'une quantité subit des* **évolutions successives** $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *de sa valeur, elle subit alors une* **évolution globale** t.

Remarque

L'ordre dans lequel les évolutions successives sont appliquées n'a pas d'importance.

Attention !

Comme on l'a vu en introduction, le taux d'évolution globale **N'EST PAS** égal à la somme des taux d'évolutions successifs !

Proposition 9 *Le coefficient multiplicateur global CM associé à l'évolution t est le produit des coefficients multiplicateurs CM_1, CM_2, ..., CM_n associés respectivement aux évolutions t_1, t_2, ..., t_n. On a donc :*

$$CM = CM_1 \times CM_2 \times \ldots \times CM_n$$

Exemple

Reprenons notre exemple introductif :

> *Imaginons que je sois en train de faire les soldes. Un jean m'intéresse ! Il est à 120€ mais avec une remise de 50%. Le vendeur me dit « Attendez la prochaine démarque, il sera encore soldé à 30% en plus des 50%. »*

A votre avis, quelle est donc la remise totale ?

On a $t_1 = \frac{50}{100} = 0,5$ et $t_2 = \frac{30}{100} = 0,3$ et ainsi $CM_1 = 1 + t_1 = 1 + (-0,5) = 0,5$ et ainsi $CM_2 = 1 + t_2 = 1 + (-0,3) = 0,7$. (Il y a des signes « - » car il s'agit d'une diminution !)
On calcule donc le coefficient multiplicateur global CM associé au taux d'évolution global t :

$$CM = CM_1 \times CM_2 = 0,5 \times 0,7 = 0,35$$

D'où $t = 0,35 - 1 = -0,65$, soit une diminution globale de 65%.

Remarque

Une petite astuce pour ne jamais faire l'erreur d'additionner les pourcentages ! Raisonner avec des « chiffres ronds » et retenez surtout l'exemple suivant : un article coûte 100€ et il y a deux diminutions successives de 50%. Si on additionnait les pourcentages, cela voudrait dire que l'on aurait une diminution globale de 100% et donc que notre article serait gratuit ! Ce qui n'est pas le cas...
En effet, 100€ diminué de 50%, ça donne 50€ et ces derniers 50€ diminué de 50% donne 25€.
D'ailleurs petit question : quelle est la diminution globale correspondant à deux diminutions successives de 50% ?

Exercice

Jean-Rachid a 15 ans et veut placer de l'argent sur un livret jeune pour pouvoir se payer son permis de conduire qui coûte 950€. Il décide de mettre 600€ sur son livret jeune et son livret lui rapporte 5% tous les ans.

1. Est-ce qu'il aura assez d'argent à 18 ans pour se payer son permis ?
2. Avec le même apport, à quel âge aura-t-il assez d'argent pour se payer son permis ?
3. Quel est l'apport de départ que Jean-Rachid devrait mettre sur son livret pour se payer son permis en 3 ans ?

3.2 Evolutions réciproques

Définition 10 *Une quantité non nulle V_D subit une évolution de taux t et devient égale à une quantité V_A. Le* **taux réciproque** *de t est le taux t' permettant de passer de V_A à V_D.*

Exemple

Un article coûte 50€ et subit une baisse de 20%, il coûte donc 40€. Il faut une augmentation de 25% pour revenir au prix initial de 50€.
On a donc ici $t = -20\%$ et le taux réciproque est $t' = +25\%$.

Proposition 11 *Le coefficient multiplicateur réciproque CM' associé à l'évolution réciproque t' est l'inverse du coefficient multiplicateur non nul CM associé à l'évolution de départ t. On a :*

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

Démonstration

Soient t et t' deux évolutions successives non nulles telles que la valeur d'arrivée soit la même que la valeur de départ. Le coefficient multiplicateur global est 1. On notre CM et CM' les coefficients multiplicateurs respectifs des évolutions t et t'. On a alors

$$CM \times CM' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad CM' = \frac{1}{CM}$$

□

Exemple

Reprenons notre exemple introductif :

> *Je suis un instagrammeur influent : 500 000 followers. Un jour, le badbuzz : je prétends que La Terre est plate et que personne n'a été sur La Lune. Internet me ridiculise et je perds 40% de mes abonnés... Les marques qui me sponsorisent font pression sur moi en me disant de m'excuser, de m'expliquer et de regagner mes 500 000 followers.*

A votre avis, quel est le pourcentage à appliquer pour ré-atteindre les 500 000 followers ?

On calcule le coefficient multiplicateur CM correspondant à la baisse de 40%. On a ainsi

$$CM = 1 - \frac{40}{100} = 1 - 0,4 = 0,6$$

. Le coefficient multiplicateur réciproque CM' associé à l'évolution réciproque t' est ainsi

$$CM' = \frac{1}{CM} == \frac{1}{0,6} \simeq 1,67$$

L'évolution réciproque est donc $t' = CM' - 1 = 1,67 - 1 = 0,67$, soit une augmentation de 67% pour ré-atteindre les 500 000 followers.

Exercice

1. Calculer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 20%
2. Calculer le taux d'évolution réciproque d'une hausse de 10% (arrondir au dixième)

4 Ouverture

Question ouverte : Pour les personnes qui comptent passer le permis de conduire (et je sais qu'il y en a !), le panneau ci-dessous est souvent visible en montagne. Que veut-il réellement dire ? 10% « de quoi » exactement ?

Culture scientifique : En physique-chimie, il y a une notion qui ressemble un peu à celle de la variation relative : c'est l'*erreur relative*, notée err. Ici, il n'y a pas de valeurs de départ et d'arrivée mais des *valeurs théoriques* et des *valeurs mesurées*. La formule est la suivante :

$$err = \frac{|\text{valeur mesurée} - \text{valeur théorique}|}{\text{valeur théorique}}$$

D'ailleurs, en physique-chimie, on a souvent tendance à croire qu'une erreur de 1% n'est pas si grave que ça... (On parle souvent d"erreur toléré"). Mais une différence de 1% dans le génome humain ferait de nous des chimpanzés... Plutôt qu'être là en train de lire ce cours, vous seriez dans la jungle en train de manger les poux d'un congénère...

