Corvée n°5 - Correction

A rendre le : 10/12/2019

« Je souhaiterais vous faire part d'une révélation surprenante, j'ai longtemps observé les humains, et ce qui m'est apparu quand j'ai tenté de qualifier votre espèce, c'est que vous n'étiez pas réellement des mammifères... Tous les mammifères sur cette planète ont contribué au développement naturel d'un équilibre avec le reste de leur environnement, mais vous les humains vous êtes différents. Vous vous installez quelque part, et vous vous multipliez, vous vous multipliez, jusqu'à ce que toute vos ressources naturelles soient épuisées, et votre espoir de réussir à survivre, c'est de vous déplacer jusqu'à un autre endroit... Il y a d'autres organismes sur cette planète qui ont adopté cette méthode, vous savez lesquels ?... Les virus. Les humains sont une maladie contagieuse, le cancer de cette planète, vous êtes la peste et nous, nous sommes l'antidote . »

Matrix, Agent Smith, 1999.

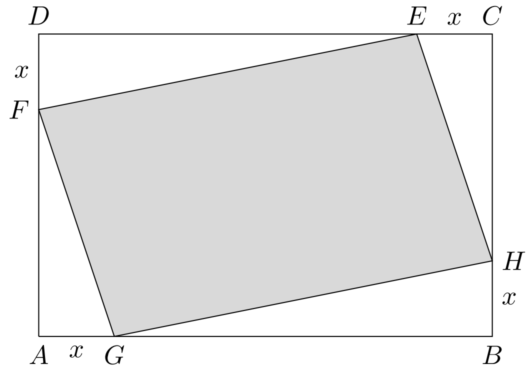
Exercice 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. $\mathcal{C}_f$ est la courbe de f dans un repère.
Recopier le tableau ci-dessous et compléter les cases vides.

Egalité	Image	Courbe	Equation	Antécédent
$f(2) = 3$	2 a pour image 3 par f	$A(2;3)$ est un point de $\mathcal{C}_f$	Le réel 2 est une solution de l'équation $f(x) = 3$	2 est un antécédent de 3 par f
$f(1) = 0$	1 a pour image 0 par f	$A(1;0)$ est un point de $\mathcal{C}_f$	Le réel 1 est une solution de l'équation $f(x) = 0$	1 est un antécédent de 0 par f
$f(-2) = 3$	-2 a pour image 3 par f	$A(-2;3)$ est un point de $\mathcal{C}_f$	Le réel -2 est une solution de l'équation $f(x) = 3$	-2 est un antécédent 3 est un antécédent
$f(4) = 5$	4 a pour image 5 par f	$A(4;5)$ est un point de $\mathcal{C}_f$	Le réel 4 est une solution de l'équation $f(x) = 5$	4 est un antécédent de 5 par f
$f(3) = -4$	3 a pour image -4 par f	$A(3;-4)$ est un point de $\mathcal{C}_f$	Le réel 3 est une solution de l'équation $f(x) = -4$	3 est un antécédent de -4 par f

Exercice 2

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. On trace un parallélogramme $EFGH$ sur $ABCD$ tel que $AG = BH = CE = DF = x$.



1. A quel intervalle I appartient x ?
x peut valoir au minimum 0 et au maximum 4. Ainsi $I = [0;4]$.

2. a. Montrer que, pour tout $x \in I$, l'aire $S(x)$ de $EFGH$ est égale à $S(x) = 24 - x(6-x) - x(4-x)$.
Pour calculer l'aire de $EFGH$, il faut tout simplement remarquer qu'il s'agit de l'aire de $ABCD$ à laquelle on retranche l'aire des triangles AFG, BGH, CEH et DFE. On remarque de plus que tous ces triangles sont rectangles et en plus que les triangles AFG et CEH ont la même aire, ainsi que les triangles BGH et DFE ont la même aire.

• Calcul de $\mathcal{A}_{ABCD}$, l'aire de de $ABCD$:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \times 6 = 24$$

• Calcul de $\mathcal{A}_{AFG}$, l'aire de de AFG (qui est égale à l'aire de CEH) :

$$\mathcal{A}_{AFG} = \frac{AF \times AG}{2} = \frac{(4-x) \times x}{2} = \frac{x(4-x)}{2}$$

• Calcul de $\mathcal{A}_{BGH}$, l'aire de de BGH (qui est égale à l'aire de DFE) :

$$\mathcal{A}_{BGH} = \frac{BG \times BH}{2} = \frac{(6-x) \times x}{2} = \frac{x(6-x)}{2}$$

• Calcul de $S(x)$, l'aire de de $EFGH$ (c'est une notation de l'énoncé, on la reprend !) :

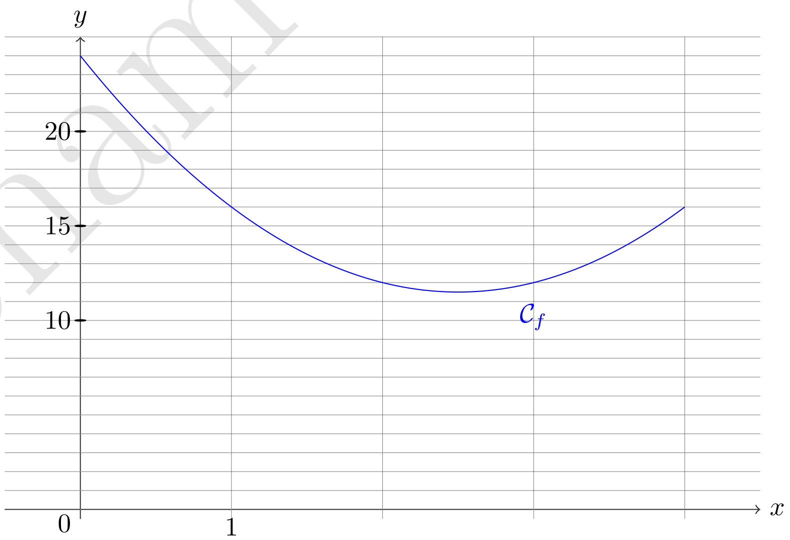
$$\begin{aligned} S(x) = \mathcal{A}_{ABCD} - 2 \times \mathcal{A}_{AFG} - 2 \times \mathcal{A}_{BGH} &= 24 - 2 \times \frac{x(4-x)}{2} - 2 \times \frac{x(6-x)}{2} \\ &= 24 - \cancel{2} \times \frac{x(4-x)}{\cancel{2}} - \cancel{2} \times \frac{x(6-x)}{\cancel{2}} \\ &= 24 - x(6-x) - x(4-x) \end{aligned}$$

On a bien montré que, pour tout $x \in I$, l'aire $S(x)$ de $EFGH$ est égale à $S(x) = 24 - x(6-x) - x(4-x)$

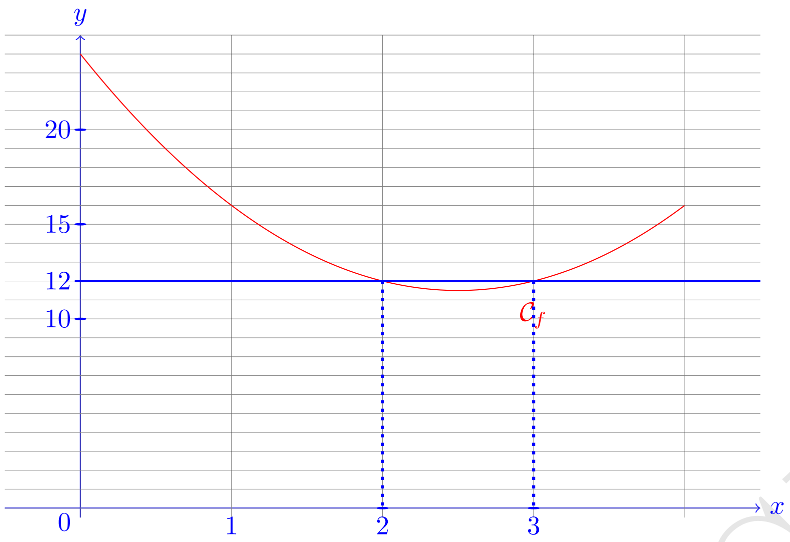
b. En déduire que, pour tout $x \in I$, $S(x) = 24 - 10x + 2x^2$.
Pour cette question, il suffit tout simplement de développer l'expression précédente :

$$S(x) = 24 - x(6-x) - x(4-x) = 24 - 6x + x^2 - 4x + x^2 = 24 - 10x + 2x^2$$

3. On donne la courbe représentative de S dans un repère orthogonal.

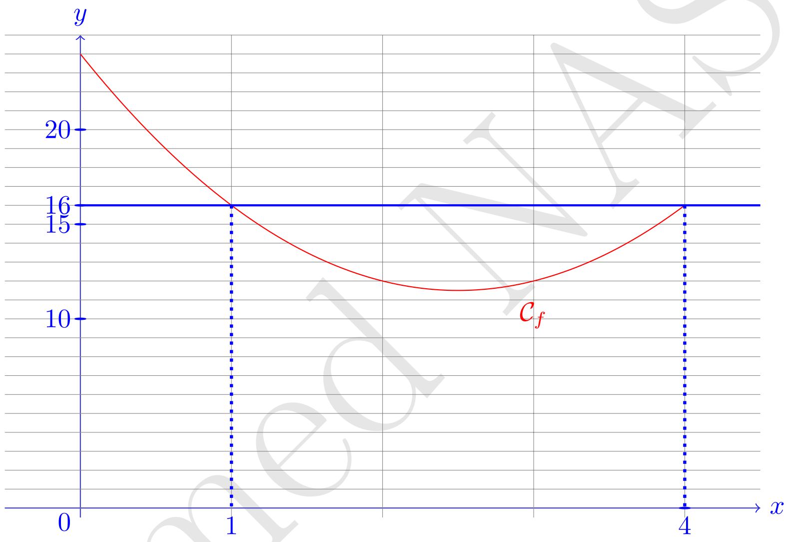


Déterminer graphiquement les valeurs de x telles que :
• $S(x) = 12$ (la moitié de l'aire de $ABCD$) ;



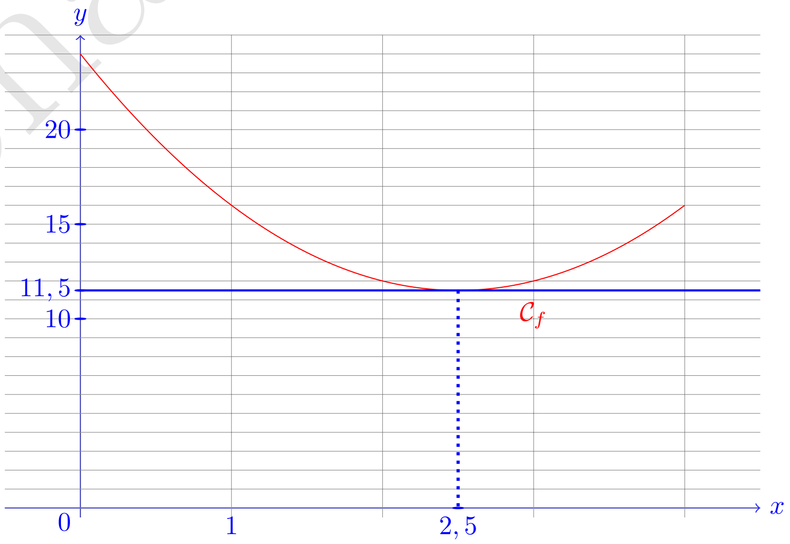
L'ensemble des solutions de l'équation $S(x) = 12$ est $\mathcal{S} = \{2; 3\}$

- $S(x) = 16$ (les deux tiers de l'aire de $ABCD$) ;



L'ensemble des solutions de l'équation $S(x) = 16$ est $\mathcal{S} = \{1; 4\}$

- $S(x) = 11,5$.



L'ensemble des solutions de l'équation $S(x) = 11,5$ est $\mathcal{S} = \{2,5\}$

Vérifier tous ces résultats par un calcul d'image.
Vérifions donc toutes nos trouvailles par le calcul :

$$S(2) = 24 - 10 \times 2 + 2 \times 2^2 = 24 - 20 + 2 \times 4 = 24 - 20 + 8 = 12$$
$$S(3) = 24 - 10 \times 3 + 2 \times 3^2 = 24 - 30 + 2 \times 9 = 24 - 30 + 18 = 12$$
$$S(1) = 24 - 10 \times 1 + 2 \times 1^2 = 24 - 10 + 2 \times 1 = 24 - 10 + 2 = 16$$
$$S(4) = 24 - 10 \times 4 + 2 \times 4^2 = 24 - 40 + 2 \times 16 = 24 - 40 + 32 = 16$$
$$S(2,5) = 24 - 10 \times 2,5 + 2 \times (2,5)^2 = 24 - 25 + 2 \times 6,25 = 24 - 25 + 12,5 = 11,5$$

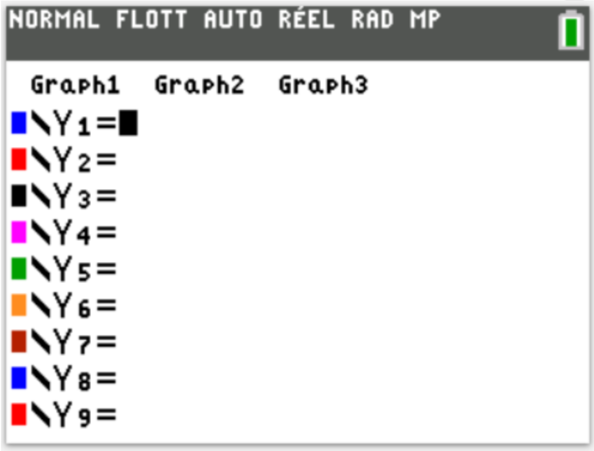
4. A l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice, donner une valeur approchée de x à 10^{-1} près telle que l'aire de $EFGH$ soit égale aux trois quarts de l'aire de $ABCD$.
Dans cette question, on cherche donc la valeur de x pour laquelle $S(x)$ égale à $\frac{3}{4} \times \mathcal{A}_{ABCD}$, c'est-à-dire $\frac{3}{4} \times 24 = 18$.
On cherche donc à résoudre

$$S(x) = 18$$

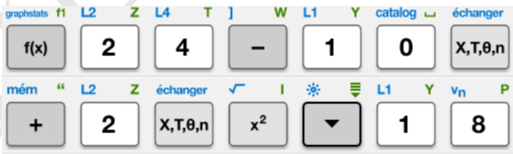
Voici la marche à suivre sur la TI-83 Premium CE, avec l'historique des touches.

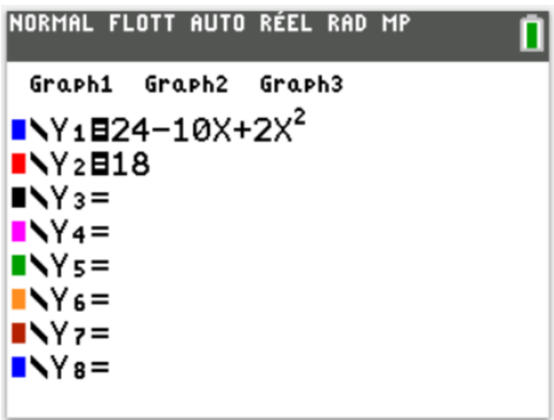
On commence avec la touche 

et on obtient la fenêtre suivante :



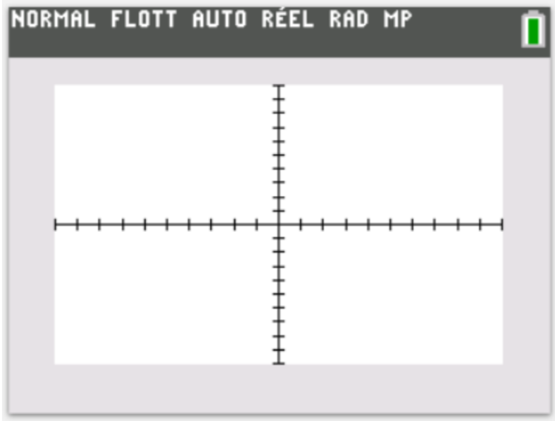
Puis on saisit les touches suivantes :





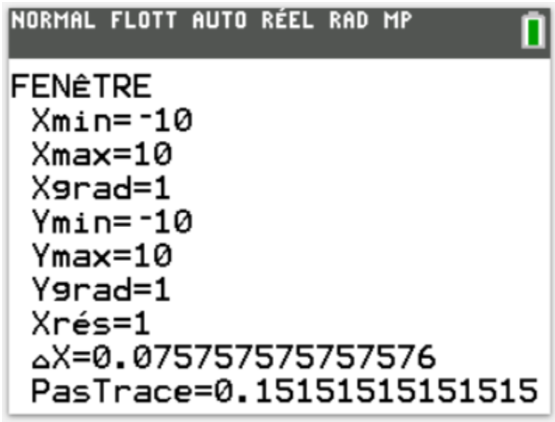
En appuyant sur la touche 

, on obtient :

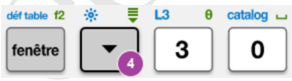


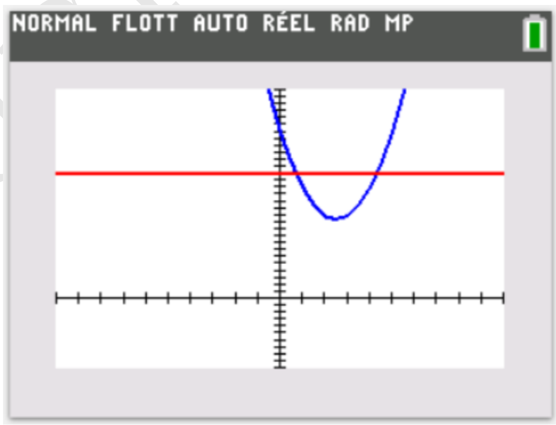
Petit hic, on ne voit pas trop bien ce qu'il se passe. Il faut changer la "taille de la fenêtre" en appuyant sur 

. On obtient donc la fenêtre suivante :



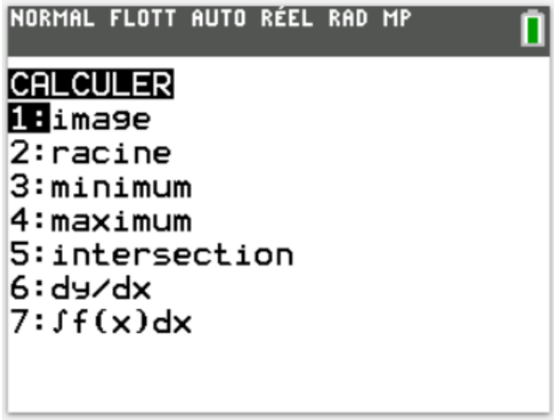
On saisit les touches suivantes, et on appuie sur "entrer" pour obtenir la fenêtre d'après :



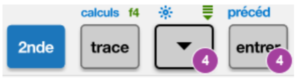


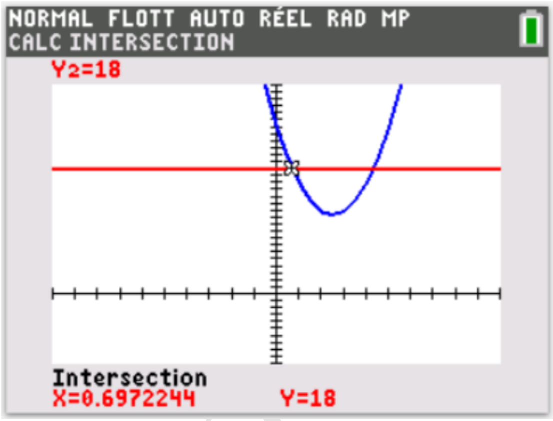
Bon ! On y voit un peu plus clair ! Il ne nous reste plus qu'à déterminer les intersections. On appuie sur la touche 

. On obtient la fenêtre :

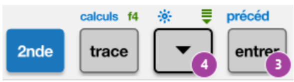


On saisit les touches suivantes, et on appuie sur "entrer" pour obtenir la fenêtre d'après :

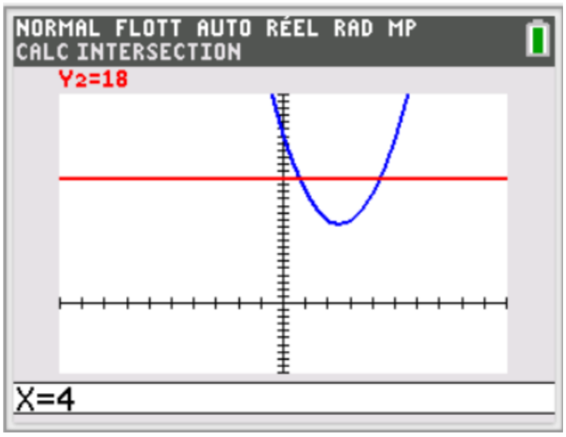




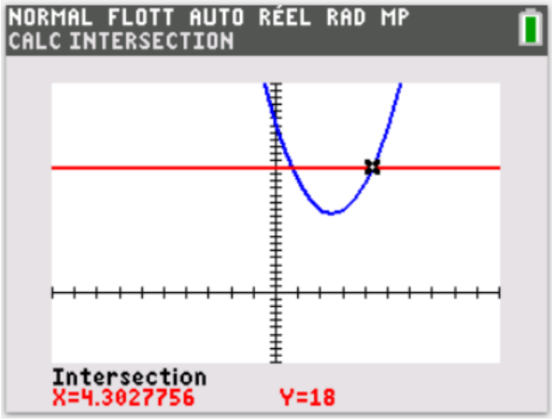
On vient de trouver l'abscisse de la première intersecetion : $X = 0,6972244$, soit $x = 0,7$ pour une valeur approchée de x à 10^{-1} près. Il nous manque la deuxième. J'aimerais prendre quelques lignes pour vous expliquer pourquoi. Tout dépend de l'emplacement initial du curseur. La calculatrice va chercher l'intersection la plus proche du curseur (ici, mon curseur était initialement proche du point d'abscisse $x = 0,6972244$). Je constate que ma deuxième intersection est proche du point d'abscisse $x = 4$. Je vais donc faire en sorte d'approcher mon curseur de ce point.
Pour cela, on appuie sur la touche "annul" de la calculatrice. On saisit les touches suivantes, et on appuie sur "entrer" pour obtenir la fenêtre d'après



Noter bien que l'on a appuyé seulement trois fois sur la touche "entrer" ! Ensuite, on va appuyer sur la touche "4" et on obtient la fenêtre ci-dessous :



En appuyant une dernière fois sur la touche "entrer", on obtient la fenêtre ci-dessous :

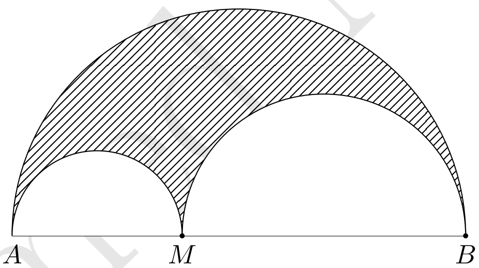


On vient de trouver l'abscisse de la deuxième intersecetion : $X = 4,3027756$, soit $x = 4,3$ pour une valeur approchée de x à 10^{-1} près.

On rappelle que l'intervalle I dans lequel appartient x est $I = [0;4]$. Donc la valeur $x = 4,3$ n'est pas valable !
Ainsi, la seule solution possible est $x = 0,7$ (valeur approchée de x à 10^{-1} près).

Exercice bonus

Le point M appartient à $[AB]$ (avec $AB = 8$), on construit demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.



La somme des aires des deux petits demi-disques peut-elle être égale à l'aire de la partie hachurée. Si oui, pour quelle(s) valeurs de AM ?

Ici, l'astuce était de poser une inconnue. Par exemple, $AM = x$. On en déduit que :

- Calcul de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}$, l'aire de $\mathcal{C}_1$ (aire du demi-disque de diamètre AM) :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \times \frac{x^2}{4} = \frac{\pi}{8}x^2$$

- Calcul de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_2}$, l'aire de $\mathcal{C}_2$ (aire du demi-disque de diamètre BM) :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(4^2 - 2 \times 4 \times \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{x^2}{4}\right)$$

- Calcul de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}_3}$, l'aire de $\mathcal{C}_3$ (aire du demi-disque de diamètre AB) :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}_3} = \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$

Nous devons encore calculer la somme des aires des deux petits demi-disques ainsi que l'aire de la partie hachurée. Allons-y !

Exercice bonus (suite)

- Calcul de $\mathcal{A}_{DD}$, la somme des aires des deux petits demi-disques :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{DD} = \mathcal{A}_{\mathcal{C}_1} + \mathcal{A}_{\mathcal{C}_2} = \frac{\pi}{8}x^2 + \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{x^2}{4} + \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{x^2}{4}\right) &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^2}{4} + \left(16 - 4x + \frac{x^2}{4}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{x^2}{4} + 16 - 4x + \frac{x^2}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{2x^2}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

- Calcul de $\mathcal{A}_H$, l'aire de la partie hachurée :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_H = \mathcal{A}_{\mathcal{C}_3} - \mathcal{A}_{DD} = 8\pi - \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{x^2}{2}\right) &= 8\pi - \frac{\pi}{2} \times 16 + \frac{\pi}{2} \times 4x - \frac{\pi}{2} \times \frac{x^2}{2} \\ &= 8\pi - 8\pi + 2\pi x - \frac{\pi}{4}x^2 \\ &= 2\pi x - \frac{\pi}{4}x^2 \\ &= \pi\left(2x - \frac{1}{4}x^2\right)\end{aligned}$$

Par suite, on cherche à savoir, pour quelles valeurs de x, ces deux dernières aires sont égales. On procède comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{DD} = \mathcal{A}_H &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\left(16 - 4x + \frac{x^2}{2}\right) = \pi\left(2x - \frac{1}{4}x^2\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \times 16 - \frac{\pi}{2} \times 4x + \frac{\pi}{2} \times \frac{x^2}{2} = 2\pi x - \frac{1}{4}\pi x^2 \\ &\Leftrightarrow 8\pi - 2\pi x + \frac{\pi x^2}{4} = 2\pi x - \frac{\pi x^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 8\pi - 2\pi x + \frac{\pi x^2}{4} - 2\pi x + \frac{\pi x^2}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8\pi - 4\pi x + 2 \times \frac{\pi x^2}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\pi \times 4 - 2\pi \times 2x + 2\pi \times \frac{x^2}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\pi\left(4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\pi\left(2^2 - 2 \times 2 \times \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\pi\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 = 0\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vérifié si et seulement si $2 - \frac{x}{2} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x = 4$.

Par conséquent , la somme des aires des deux petits demi-disques est égale à l'aire de la partie hachurée pour $x = AM = 4$.