Représentations graphiques. Equations.

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

• Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance et calcul de coordonnées.
• Relier représentation graphique et tableau de variations.
• Déterminer graphiquement les extremum d'une fonction sur un intervalle.
• Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
• Résoudre une équation du type $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.

Mots – clefs :

Fonction - Image et antécédent - Ensemble de définition - Tableau de valeurs - Représentation graphique - Parité

Prérequis :

Repère - Abscisse et ordonnée d'un point - Symétrie axiale et centrale - Equations

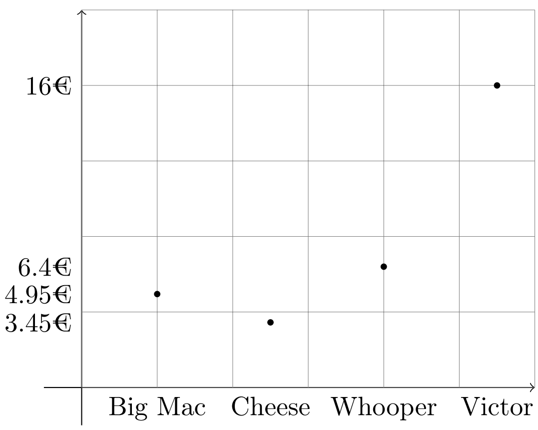
La musique du chapitre : Eurythmics - Sweet Dreams. Album : Sweet Dreams - Date de sortie : 1983.

Dans ce chapitre, on va définir un objet très important en mathématique : une *fonction*. En fait, ce qu'il faut déjà comprendre, c'est qu'une fonction, c'est une *transformation d'objets*. Un exemple pour illustrer ce propos :

- Big Mac de McDonald's et une petite frite : 4,95€
- Cheeseburger de Quick et une petite frite : 3,45€
- Whooper de Burger King et une petite frite : 6,40€
- Victor[1] de Big Fernand et des fernandines[2] : 16€[3]

Etonnamment, on vient de créer une fonction ! A chaque formule, on a associé un prix. C'est quelque chose que l'on fait dans la vie de tous les jours sans s'en rendre compte. On peut donc représenter la chose avec la figure ci-contre.

On dira que les prix sont les *images* et les formules de burgers les *antécédents*.



On va voir qu'il y a plusieurs façons de définir une fonction : avec une *formule explicite*, un *tableau de valeurs* ou une *courbe*. Fort de ces différentes représentations, on analysera la parité d'une fonction et les conséquences sur son graphe.

Pour finir, nous verrons que l'un des intérêts des fonctions, c'est la résolution graphique (et donc non exacte) d'équations.

« Celui qui ouvre une porte d'école ferme une prison. »

Victor Hugo

[1] Hamburgé de veau, fourme d'Ambert (bleu crémeux), oignons confits, coriandre, sauce Tonton Fernand (mayonnaise délicalement sucrée).

[2] Frites faites à base de pommes de terre fraîches, assaisonnement paprika-ail ou herbes de Provence.

[3] Bien évidemment, votre professeur vous conseille de manger équilibré !

1 Définitions

1.1 Notions de fonction, d'image et d'antécédents

Définition 1 *Définir une fonction f sur un ensemble de réels D consiste à associer à chaque réel $x \in D$ un unique réel y.*
Pour signifier que y est le réel associé à x par la fonction f, on note : $y = f(x)$.
On note cette correspondance :

$$\begin{aligned} F : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Un peu d'histoire

Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1er juillet 1646 - Hanovre, 14 novembre 1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand (rien que ça...). Il est souvent considéré comme le dernier « génie universel ».
Malgré le fait que sa pensée ait révolutionné l'Europe, on raconte que seul son secrétaire était présent à ses funérailles.

Remarque
On peut aussi noter une fonction par une autre lettre que f et la variable par une autre lettre que x. Par exemple, si à une personne, on lui associe son âge, on notera la fonction a (a pour âge) et la variable p (p pour personne). On notera donc $a(p)$ l'âge d'une personne.

Attention !
Il y a une erreur fréquente qui perdure depuis des lustres ... Il ne faut pas confondre f et $f(x)$! Dans le premier cas, f est la fonction, c'est une tranformation ! Dans le second cas, $f(x)$ est un nombre !

Définition 2 • *D est appelé l'**ensemble de définition** de f : il s'agit donc de l'ensemble des réels x ayant un réel y associé par f.*
• *y est appelé l'**image** de x par f.*
• *On dit que x est **un antécédent** de y par f.*

Attention !
Pour un x de l'ensemble de définition, il existe qu'une et une seule image, mais pour un y, il peut exister plusieurs antécédents.
C'est assez évident à comprendre en fait. Si on prend la fonction qui a une personne (antécédent) associe son âge (image), chaque personne n'a qu'un seul âge, mais par contre un âge peut correspondre à plusieurs personnes.

Exemple
On observe la température d'une pièce pendant 24 heures. A chaque instant t de la journée correspond donc une température unique, notée $f(t)$. La fonction f est donc définie sur $D = [0; 24]$.
Les températures atteintes plusieurs fois dans la journée ont plusieurs antécédents (la température 20°C peut être atteinte à plusieurs moments de la journée).

Fin 22/11
$2^{\text{nde}}14$
$2^{\text{nde}}6$

Exercice
A chaque réel x, on associe le réel x^2. On définit donc la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = x^2$$

1. Donner l'image et l'antécédent de 0. 2. Donner l'image et l'antécédent de 2. 3. Donner l'image et l'antécédent de -1.

1.2 Trois façons de définir une fonction

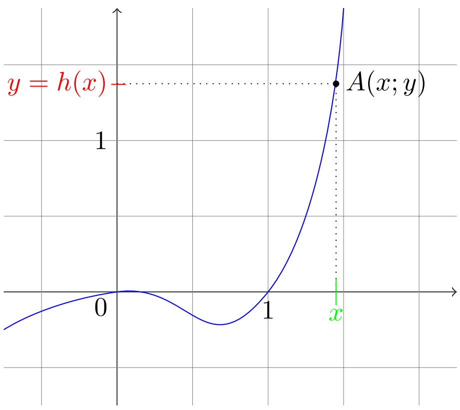
Définition 3 *Il y a trois principaux modes de définition d'une fonction f permettant d'associer à un réel x, de l'ensemble de définition D, son image y.*

1. *Avec une* **relation algébrique** *: on connaît l'expression de $f(x)$ en fonction de x.*
Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 1$.

2. *Avec un* **tableau de valeurs** *: on donne explicitement les images associées à différentes valeurs de x.*
Par exemple, ici, $g(-1) = 0$ et 2 admet pour antécédents 0 et 10.

x	-1	0	5	10
$g(x)$	0	2	3	2

3. *Avec une* **courbe** *: la courbe représentative d'une fonction h est l'ensemble des points $A(x; y)$ tels que $y = h(x)$.*

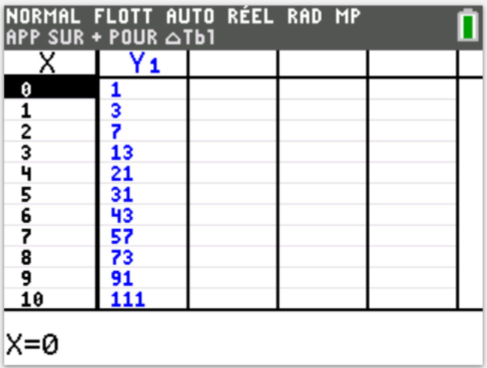


Remarque - Comparaison des trois modes de définition

	Avantages	**Inconvénients**
Relation algébrique	On peut toujours calculer une image	Pas toujours facile de calculer des antécédents
Tableau de valeurs	Visualisation rapide des images et antécédents donnés	Fonction définie sur intervalle discret Tracé de la courbe par extension probable
Courbe	Représentation explicite et complète	Lecture d'images et d'antécédents permise par la précision du graphe

Tableau de valeurs sur la TI-83 Premium CE

Il est possible d'obtenir un tableau de valeurs d'une fonction sur la TI-83 Premium CE. On a pris l'exemple avec la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$. Voici l'historique des touches :



Il est possible de choisir les valeurs de x pour lesquelles on souhaite avoir un tableau de valeurs grâce à la touche fenêtre

Exercice

On considère la fonction f définie sur $D = [-2; 7]$ par $f(x) = 6x - x^2$.
1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$									

2. Utiliser ce tableau pour tracer la courbe représentative de f.

Fin 25/11
$2^{\text{nde}}14$
$2^{\text{nde}}6$

1.3 Parité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Définition 4 *On dit que f est :*
• **pair** *si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$;*
• **impair** *si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.*

Exemple

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

La fonction f est donc une fonction paire.
• Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$$

La fonction g est donc une fonction impaire.

Attention !

Il existe des fonctions qui sont ni paires, ni impaires. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$ n'est ni paire, ni impaire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$ qui est différent de $f(x)$ et de $-f(x)$...

Proposition 5
1. f est paire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. f est impaire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Fin 25/11 $2^{\text{nde}}14$

Fin 26/11 $2^{\text{nde}}6$

Démonstration (Cas paire)

On démontre le "*sens direct*". Ainsi, dans ce qui suit, la fonction f est supposée paire.
On appelle M et M' les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont les abscisses respectifs sont x et $-x$.
Précisons leurs coordonnées :
- Celles de M sont : $(x; f(x))$.
- Celles de M' sont : $(-x; f(-x))$, ce qui s'écrit encore $(-x; f(x))$ puisque f est paire.
Comme $M(x; f(x))$ et $M(-x; f(x))$, cela traduit le fait que M' est le symétrique M par rapport à l'axe des ordonnées.
Par suite, comme les points M et M' sont quelconques, nous venons de montrer que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On démontre le "*sens indirect*". Ainsi, dans ce qui suit, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
On appelle M et M' les points de la courbe représentant la fonction f dont les abscisses respectifs sont x et $-x$.
Précisons leurs coordonnées :
- Celles de M sont : $(x; f(x))$.
- Celles de M' sont : $(-x; f(x))$, puisque M' est le symétrique M par rapport à l'axe des ordonnées.
Or, par définition, puisque $M' \in \mathcal{C}_f$, ses coordonnées sont $(-x; f(-x))$. Par conséquent, on a donc $f(-x) = f(x)$ et ceci pour tout x sur l'intervalle de définition de f (puisque le choix du point M est quelconque). Nous venons donc de montrer que f est paire.

□

2 Résolutions graphiques

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont respectivement les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.

2.1 Résolution graphique d'équation du type $f(x) = k$

Définition 6 *Soient f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.*
Résoudre l'équation $f(x) = k$:
- *consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont pour image k ;*
- *revient donc à déterminer l'ensemble des antécédents de k par f.*

Proposition 7
Graphiquement, les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ ayant pour ordonnée k.

Démonstration
$\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$. Or, on cherche les valeurs de x telles que $f(x) = k$. On cherche donc les points de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; k)$ et les solutions sont les abscisses de ces points. □

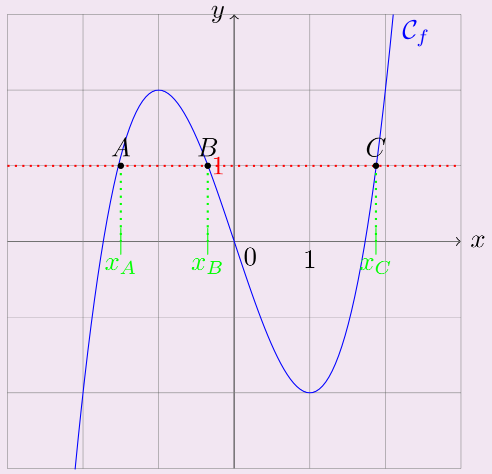
Exemple

Résoudre graphiquement l'équation $x^3 - 3x = 1$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. L'équation s'écrit donc $f(x) = 1$.

Les antécédents de 1 par f sont :
- $x_A \simeq -1,5$
- $x_B \simeq -0,4$
- $x_C \simeq 1,9$

A la précision de lecture graphique près, $\mathcal{S} = \{-1,5; -0,4; 1,9\}$



Fin 02/12 2nde14

Fin 03/12 2nde6

2.2 Résolution graphique d'équations du type $f(x) = g(x)$

Définition 8 *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.*
Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont la même image par f et par g.

Proposition 9
Graphiquement, les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes représentatives de f et de g.

Démonstration

Par définition, $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ et $\mathcal{C}_g$ est l'ensemble des points $N(x; g(x))$ pour $x \in D$.
Soit P un point de $\mathcal{C}_f$, d'abscisse x telle que $f(x) = g(x)$. Puisque $P \in \mathcal{C}_f$, alors ses coordonnées sont $(x; f(x))$. Et puisque, $f(x) = g(x)$, alors ses coordonnées s'écrivent aussi $(x; g(x))$.
On en déduit donc que P est aussi un point de $\mathcal{C}_g$ donc P est un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.

$\square$

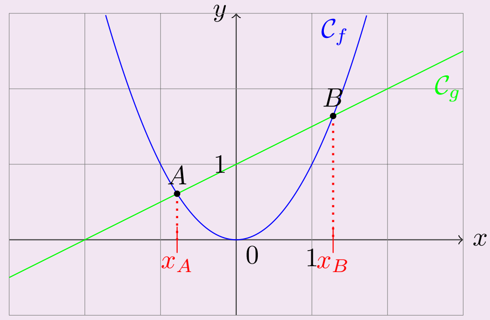
Exemple

Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = \frac{1}{2}x + 1$.

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. L'équation s'écrit donc $f(x) = g(x)$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ sont :
- $x_A \simeq -0,8$
- $x_B \simeq 1,3$

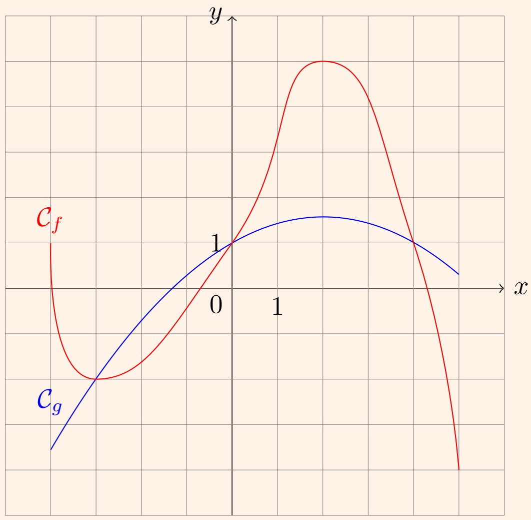
A la précision de lecture graphique près, $\mathcal{S} = \{-0,8; 1,3\}$



Exercice

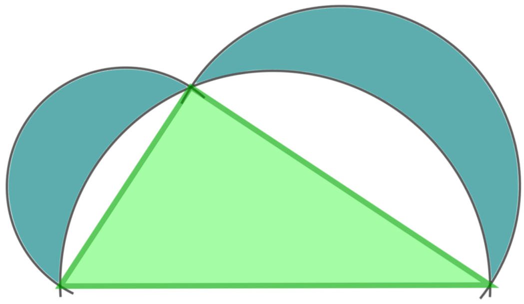
Résoudre graphiquement les équations :

a. $f(x) = 4$ **b.** $f(x) = 1$ **c.** $g(x) = -2$
d. $g(x) = 2$ **e.** $g(x) = 0$ **f.** $f(x) = g(x)$

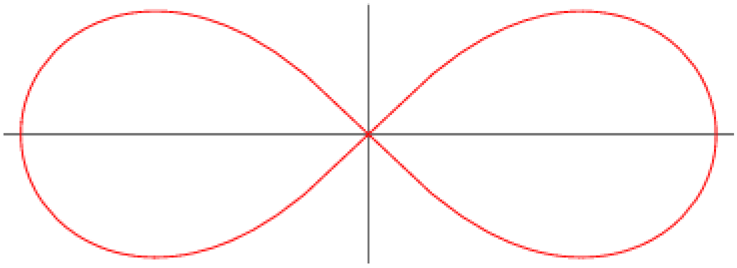


3 Ouverture

Question ouverte : Les trois demi-cercle ci-dessous ont pour diamètre les côtés du triangle rectangle. Montrer que l'aire totale des lunules est égale à l'aire du triangle.

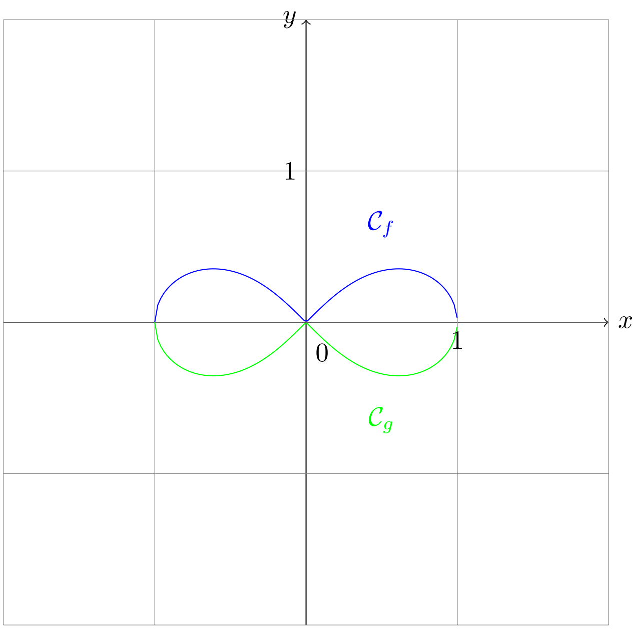


Culture scientifique : Une lemniscate est une courbe plane ayant la forme d'un 8. Elle possède deux axes de symétrie perpendiculaires. Ceux-ci se coupent en un "point double" de la courbe, également son centre de symétrie. On a pu penser que le symbole de l'infini (∞) provenait de la lemniscate de Bernoulli, mais la première utilisation de ce symbole remonte au moins à John Wallis en 1655 (soit 40 ans avant la description de Bernoulli), et lui est même sans doute antérieure.



Malheureusement, la courbe ci-dessous n'est pas le graphe d'une fonction (il existe plusieurs images pour un antécédent...). En revanche, il est possible de construire cette figure grâce aux deux fonctions paires suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+8x^2}-(1+2x^2)}$$
$$g(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+8x^2}-(1+2x^2)}$$



Fin 02/12
$2^{\text{nde}}6$
$2^{\text{nde}}14$