Calvaire n°3 - Correction

29/11/2019

« N'aie pas pitié des morts. Aie plutôt pitié des vivants et surtout de ceux qui vivent sans amour. »
Albus (Perceval Wulfric Brian) Dumbledore, Harry Potter et les Reliques de la Mort, 2007.

Partie 1 - Multiple et diviseurs

Exercice 1

Recopier les phrases suivantes et les compléter par *multiple* ou *diviseur* :
a. 250 est un multiple de 50. **b.** 0 est un multiple de 15. **c.** 2019 est un multiple de 0.
d. 21 est un diviseur de -2100. **e.** 1 est un diviseur de 4. **f.** 37 est un diviseur et un multiple de 37.

Exercice 2

On considère un entier naturel n. Démontrer que $3n-1$ divise $6n^2-2n$.

Pour répondre à cette question, il suffisait d'écrire :

$$6n^2 - 2n = 2n \times 3n - 2n \times 1 = 2n(3n-1)$$

Cette relation est vraie pour tout entier naturel n. De plus, $2n \in \mathbb{N}$, par conséquent, on vient bien de montrer que $3n-1$ divise $6n^2-2n$, pour tout entier naturel n.

Exercice 3

a	g	h	■
b			i
c	■	d	
■	e	■	f

Horizontal
a $PGCD(125; 250)$.
b Ce nombre est un multiple de 9.
c Le chiffre des unités d'un nombre divisible par 10.
d Ce nombre est divisible par 5.
e Le reste de la division euclidienne de 121 par 8.
f Le quotient dans celle de 245 par 112.

Vertical
a Le plus petit multiple de 24 à trois chiffres.
g Le quotient de la division euclidienne de 274 par 10.
e Diviseur commun à tous les entiers.
h $PGCD(1542; 3598)$
i 3 est un diviseur de ce nombre.

1	2	5	■
2	7	1	8
0	■	4	5
■	1	■	2

Mohamed NASSIRI

Partie 2 - Nombres pairs et impairs

Exercice 1

Démonstration du cours : Démontrer que le carré d'un nombre impair est impair. Voir le cours.

Exercice 2

Démontrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Soit m et n deux nombres pairs. Alors il existe deux entiers k et l tels que

$$m = 2k + 1$$
$$n = 2l + 1$$

Par suite,

$$m + n = (2k + 1) + (2l + 1) = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1)$$

Or, comme $k + l + 1$ est un entier, on vient bien de montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Démontrer que si n est pair, alors $n(n + 1)$ est pair.
Puisque n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. Par suite,

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

Or, comme $2k^2 + k$ est un entier, on vient bien de montrer que si n est pair, alors $n(n + 1)$ est pair.

2. Démontrer que si n est impair, alors $n(n + 1)$ est pair.
Puisque n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Par suite,

$$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 4k^2 + 4k + 2k + 2 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

Or, comme $2k^2 + 3k + 1$ est un entier, on vient bien de montrer que si n est impair, alors $n(n + 1)$ est pair.

3. Que peut-on conclure sur $n(n + 1)$?
Ici, nous venons de raisonner par "disjonction de cas". On a démontré cette proposition pour les entiers pairs, d'une part, et les entiers impairs d'autre part. Or, puisque les entiers pairs et impairs forment tous les entiers, on a démontré la proposition pour tous les entiers, c'est-à-dire :

« Si n est un entier, alors $n(n + 1)$ est pair.»

Exercice bonus
Montrer que la somme de quatre nombres consécutifs est paire.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Les trois entiers consécutifs s'écrivent donc $k + 1$, $k + 2$ et $k + 3$. Par suite,

$$k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) = 4k + 6 = 2(2k + 3)$$

Or $2k + 3$ est un entier, donc on vient de montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est paire.

Mohamed NASSIRI

Partie 3 - Nombres premiers

Exercice 1

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :
a. $27 = 3^3$ **b.** $49 = 7^2$ **c.** $100 = 2^2 \times 5^2$ **d.** $24 = 2^3 \times 3$

Exercice 2

Répondre par *Vrai* ou *Faux* (Justifier la réponse dans le cas *Faux*) :
1. Tous les nombres impairs sont premiers.
Faux. 2 est un nombre premier et il est pair.

2. Aucun nombre pair n'est premier.
Faux. Tout nombre premier est impair sauf 2.

3. La différence entre deux nombres premiers est toujours deux.
Faux. 7 et 11 sont premiers et $11 - 7 = 4$

4. Il y a une infinité de nombres premiers.
Vrai.

Exercice 3

On dit que deux nombres premiers forment une paire s'ils s'écrivent avec les mêmes chiffres mais en sens inverse. Par exemple, 1933 et 3391 forment une paire.
1. Expliquer pourquoi le premier chiffre d'un entier d'une paire ne peut être que 1, 3, 7 ou 9.
Supposons le contraire, c'est-à-dire que le premier chiffre d'un entier d'une paire peut être 0, 2, 4, 6 ou 8. Dans ce cas, d'après le critère de divisibilité par 2 et 5 (« Si un nombre se termine par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8, alors il est divisible par 2, et réciproquement ! » et « Si un nombre se termine par 0 ou 5, alors il est divisible par 5, et réciproquement ! »). Par conséquent, il ne peut pas être premier. Donc, le premier chiffre d'un entier d'une paire ne peut être que 1, 3, 7 ou 9.

2. Trouver toutes les paires de nombres premiers à deux chiffres.
Voici la liste des nombres premiers à deux chiffres :

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, \text{ et } 97.$$

Dans cette liste, on supprime les nombres suivants :

$$11, 13, 17, 19, \cancel{23}, \cancel{29}, 31, 37, \cancel{41}, \cancel{43}, \cancel{47}, \cancel{53}, \cancel{59}, \cancel{21}, \cancel{67}, 71, 73, 79, \cancel{83}, \cancel{89}, \text{ et } 97.$$

Puisqu'en les écrivant avec les mêmes chiffres en sens inverse, on fera apparaître 2, 4, 5, 6 ou 8, et donc on ne pourra pas avoir de nombre premier. Ainsi, on a les paires de nombres premiers suivantes :

$$11 \text{ (avec lui-même)}, \ \{13; 31\}, \ \{17; 71\}, \ \{37; 73\}, \ \text{et } \{79; 97\}$$

On remarque qu'il reste 19... En effet, 91 n'est pas un nombre premier : $91 = 13 \times 7$

Mohamed NASSIRI

Partie 4 - Algorithmique en Python

Exercice 1

Le script suivant définit une fonction qu'on peut appliquer à un entier et qui renvoie s'il est pair ou impair. Comment compléter par *Pair* ou *Impair* les lignes 3 et 5 du script ?

```python
def parite(n):
    if n % 2 == 0:
        return "..."
    else:
        return "..."
```

Réponse :

```python
def parite(n):
    if n % 2 == 0:
        return "Pair"
    else:
        return "Impair"
```

Exercice 2

Comment compléter le script suivant pour que la fonction **estPair** renvoie si l'entier auquel on l'applique est pair ou non ?

```python
def estPair(n):
    return ...
```

Réponse :

```python
def estPair(n):
    return n % 2 == 0
```

Exercice 3

Ecrire un script contenant une fonction, que l'on appelera **isOdd** qui renvoie si l'entier auquel on l'applique est impair ou non.

Réponse :

```python
def isOdd(n):
    return n % 2 == 1
```

On rappelle que la commmande **%** en Python donne le reste de la division euclidienne entre deux nombres et la commande **==** permet quant à elle de tester si deux quantités sont égales . Par exemple

```
>>> 21%4
1
>>> 3==3
True
>>> 3==4
False
```

Ainsi, pour un entier n, quand on écrit **n%2==0** ou **n%2==1**, on est en train de tester si le reste de la division euclidienne entre n et 2 vaut respectivement 0 ou 1, et ainsi, on veut savoir n est respectivement pair ou impair.

Mohamed NASSIRI