

Corvée n°4 - Correction

A rendre le : 22/11/2019

« J'ai perdu mes attraits, et l'Amour va paraître. De mon destin, rien n'égal l'horreur. »

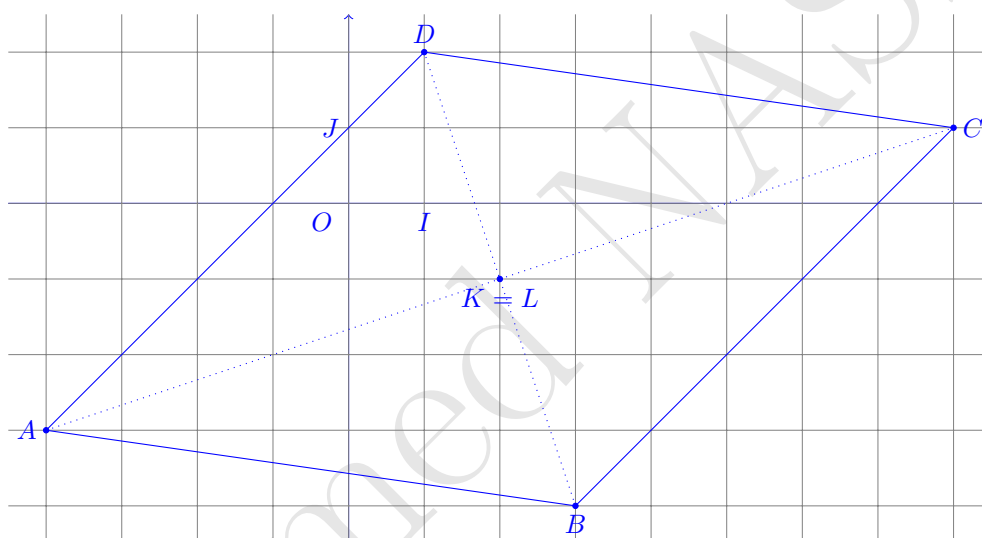
Jean-Joseph Cassanée de Mondonville, Les Fêtes de Paphos - Acte 3 : L'Amour et Psyché

Hors-d'œuvre indispensable

1. Emettre une conjecture sur la nature du quadrilatère $ABCD$ puis la démontrer

a. $A(-4; -3)$, $B(3; -4)$, $C(8; 1)$, $D(1; 2)$.

Le quadrilatère $ABCD$ semble être un parallélogramme.



• Montrons d'abord que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme :

Soit K le milieu du segment $[AC]$ et L le milieu du segment $[BD]$

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4 + 8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Les coordonnées du milieu du segment $[AC]$ sont $K(2; -1)$ et les coordonnées du milieu du segment $[BD]$ sont $L(2; -1)$. On remarque que les points K et L sont confondus (ils ont les mêmes coordonnées). Ainsi les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, et donc $ABCD$ est un parallélogramme.



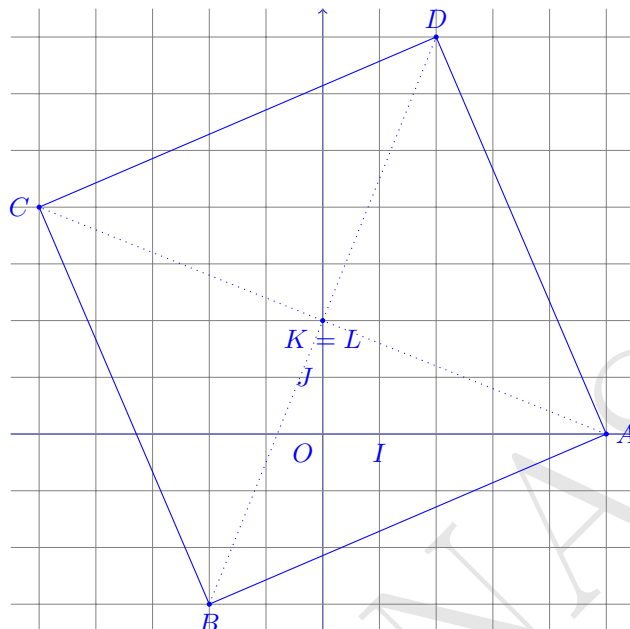
La figure est même un losange, mais je n'attendais pas spécialement cette démonstration.

Hors-d'œuvre indispensable (suite)

1. Emettre une conjecture sur la nature du quadrilatère $ABCD$ puis la démontrer

b. $A(5; 0)$, $B(-2; -3)$, $C(-5; 4)$, $D(2; 7)$.

Le quadrilatère $ABCD$ semble être un carré. Pour le montrer, on va d'abord démontrer que c'est un parallélogramme, puis que deux côtés consécutifs sont perpendiculaires et égaux. Allons-y!



• Montrons d'abord que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme :

Soit K le milieu du segment $[AC]$ et L le milieu du segment $[BD]$

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5 + (-5)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Les coordonnées du milieu du segment $[AC]$ sont $K(0; 2)$ et les coordonnées du milieu du segment $[BD]$ sont $L(0; 2)$. On remarque que les points K et L sont confondus (ils ont les mêmes coordonnées). Ainsi les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

• Montrons, pour finir, que le triangle ABD est un rectangle isocèle en A :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 5)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (7 - (-3))^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116}$$

On remarque que $AB = AD$, donc le triangle ABD est bien un isocèle en A (à ce stade, on peut seulement déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un losange, rien de plus!). Par suite, on a d'une part

$$AB^2 + AD^2 = (\sqrt{58})^2 + (\sqrt{58})^2 = 58 + 58 = 116$$

et d'autre part

$$BD^2 = (\sqrt{116})^2 = 116$$

Ainsi, $BD^2 = AB^2 + AD^2$ et donc, par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A .

Conclusion : Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Hors-d'œuvre indispensable (suite)

2. Les points A , B et C sont-ils alignés ?

a. $A(2; -5)$, $B(3; 7)$, et $C(-1; -1)$.

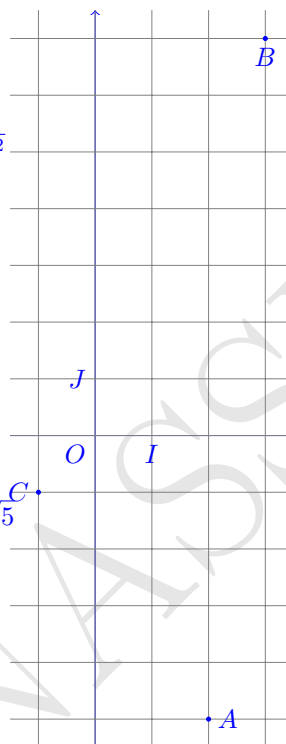
Les points A , B , et C ne semblent pas alignés, nous devons donc montrer que $AB \neq AC + BC$.

Allons-y !

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 - 7)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{16 + 64} \\ &= \sqrt{80} \\ &= \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + (7 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{1 + 144} = \sqrt{145} \end{aligned}$$



On a d'une part,

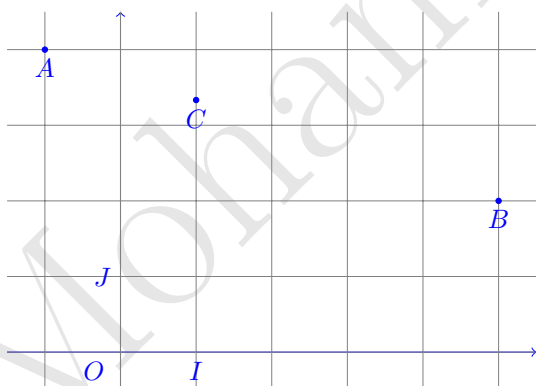
$$AB = \sqrt{145} \simeq 12.0415945788$$

et d'autre part,

$$AC + BC = 5 + 4\sqrt{5} \simeq 13.94427191$$

Par conséquent, $AB \neq AC + BC$, et donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. $A(-1; 4)$, $B(5; 2)$, et $C(1; \frac{10}{3})$.



Les points A , B , et C semblent alignés (ce n'est qu'une supposition!), nous devons donc montrer que $AB = AC + BC$. Allons-y !

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(5 - (-1))^2 + (2 - 4)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \\ &= \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + \left(\frac{10}{3} - 4\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{10}{3} - \frac{4 \times 3}{1 \times 3}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 \times 9}{1 \times 9} + \frac{4}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{40}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

Hors-d'œuvre indispensable (fin)

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{(-4)^2 + \left(\frac{10}{3} - \frac{2 \times 3}{1 \times 3}\right)^2} = \sqrt{16 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16 \times 9}{1 \times 9} + \frac{16}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{160}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{\sqrt{16 \times 10}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{10}}{3} = \frac{4\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

On a donc

$$AC + BC = \frac{2\sqrt{10}}{3} + \frac{4\sqrt{10}}{3} = \frac{6\sqrt{10}}{3} = 2\sqrt{10} = AB$$

Puisque $AB = AC + BC$, les points A , B , et C sont donc alignés.

Exercice 1

Lors d'une convention d'e-sport, il y a 80 gameurs et 60 gameuses inscrits. L'organisation veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant le même nombre d'hommes et le même nombre de femmes. Combien d'équipes peuvent être constituées ?

Pour cette question, il faut bien entendu utiliser le PGCD de 80 et 60. Pour ce faire, on décompose ces deux nombres en produit de facteurs premiers :

$$\begin{aligned} 80 &= 2^4 \times 5 \\ 60 &= 2^2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Pour calculer le pgcd, on sélectionne les facteurs communs (présents dans les deux produits) ; s'ils figurent avec des exposants, nous leur attribuons leur plus petit exposant ; ensuite nous effectuons le produit :

$$PGCD(60; 80) = 2^2 \times 5 = 20$$

Ainsi, on a donc

$$\begin{aligned} 80 &= 20 \times 4 \\ 60 &= 20 \times 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut donc constituer au maximum 20 équipes mixtes contenant 4 hommes et 3 femmes.

Exercice 2

Démontrer que si a est un entier, $a^2 - a$ est pair.

Ici, pour démontrer cette proposition, on doit raisonner par "disjonction de cas". On va démontrer cette proposition pour les entiers pairs, d'une part, et les entiers impairs d'autre part. Ainsi, puisque les entiers pairs et impairs forment tous les entiers, on aura démontré la proposition pour tous les entiers. Allons-y !

Cas n°1 : a est un entier pair

Puisque n est pair, il existe un entier k tel que $a = 2k$. Par suite,

$$a^2 - a = (2k)^2 - 2k = 4k^2 - 2k = 2 \times 2k^2 - 2 \times k = 2(2k^2 - 2)$$

Or, comme $2k^2 - 2 \in \mathbb{Z}$, alors on n'a bien écrit $a^2 - a$ sous la forme $2l$ avec $l = 2k^2 - 2 \in \mathbb{Z}$.

Cas n°2 : a est un entier impair

Puisque n est impair, il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$. Par suite,

$$\begin{aligned} a^2 - a &= (2k + 1)^2 - (2k + 1) = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 - 2k - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1 \\ &= 4k^2 + 2k \\ &= 2 \times 2k^2 + 2 \times k \\ &= 2(2k^2 + 2) \end{aligned}$$

Or, comme $2k^2 + 2 \in \mathbb{Z}$, on n'a bien écrit $a^2 - a$ sous la forme $2l$ avec $l = 2k^2 + 2 \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, nous avons bien montré, par disjonction de cas, que si a est un entier, $a^2 - a$ est pair.

Exercice 3

1. **Vrai/Faux** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Vrai. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Les deux entiers consécutifs s'écrivent donc $k + 1$ et $k + 2$. Par suite,

$$k + (k + 1) + (k + 2) = 3k + 3 = 3 \underbrace{(k + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc la somme de trois entiers consécutifs est bien un multiple de 3.

b. La somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4.

Faux. On propose deux méthodes.

Méthode 1 : un contre-exemple

En prenant $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, on remarque bien que la somme de quatre entiers consécutifs n'est pas toujours un multiple de 4.

Méthode 2 : une démonstration

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Les trois entiers consécutifs s'écrivent donc $k + 1$, $k + 2$ et $k + 3$. Par suite,

$$k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) = 4k + 6$$

Or $4k + 6$ ne peut pas s'écrire sous la forme $4l$ avec $l \in \mathbb{Z}$. Donc la somme de quatre entiers consécutifs n'est pas toujours un multiple de 4.

c. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

Vrai. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Les quatre entiers consécutifs s'écrivent donc $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ et $k + 4$. Par suite,

$$k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) = 5k + 10 = 5 \underbrace{(k + 2)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc la somme de cinq entiers consécutifs est bien un multiple de 5.

2. **Vrai/Faux** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. Le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9.

Vrai. Soit deux entiers m et n qui sont des multiples de 3. Ainsi, il existe deux entiers k et l tels que

$$\begin{aligned} m &= 3k \\ n &= 3l \end{aligned}$$

Par suite,

$$m \times n = 3k \times 3l = 9 \times \underbrace{kl}_{\in \mathbb{Z}}$$

Par conséquent, le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9.

b. Le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24.

Vrai. Soit m un multiple de 4 et n un multiple de 6. Alors, il existe deux entiers k et l tels que

$$\begin{aligned} m &= 4k \\ n &= 6l \end{aligned}$$

Par suite,

$$m \times n = 4k \times 6l = 24 \times \underbrace{kl}_{\in \mathbb{Z}}$$

Par conséquent, le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24.

3. Vrai/Faux Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. Tout nombre entier strictement positif a un nombre pair de diviseurs.

Faux. Il suffit de prendre le nombre 4 et remarquer que ses diviseurs sont 1, 2 et 4. Il a donc trois diviseurs.

b. Il y a plus de nombres premiers entre 20 et 30 qu'entre 40 et 50.

Faux.

Nombres premiers entre 20 et 30 : 23 et 29

Nombres premiers entre 40 et 50 : 41, 43 et 47

c. Un diviseur d'un nombre premier est forcément premier.

Faux. On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs. Ces deux diviseurs sont 1 et le nombre considéré. Or 1, qui est un diviseur de tous les nombres (premiers), n'est pas premier (car il n'a qu'un seul diviseur entier positif).
