Multiples, diviseurs et nombres premiers

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

• Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
• Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.
• Raisonner par disjonction de cas, par l'absurde.

Mots – clefs :

Multiples - Diviseurs - Nombres premiers - Nombres pairs et impairs

Prérequis :

Entiers naturels - Entiers relatifs - Division euclidienne

𝄞 *La musique du chapitre : Naive New Beaters - Heal Tomorrow - ft. Izia. Album : A La folie - Date de sortie : 2016.*

Dans notre premier chapitre, on a parlé de plusieurs ensembles de nombres. On va s'arrêter quelques instants sur l'ensemble des entiers relatifs (les entiers positifs et négatifs). Même si cet ensemble semble d'apparence simple, on va voir qu'il est possible d'avoir des résultats intéressants.

On va revenir sur les notions de *multiples* et *diviseurs*, peut-être vues au collège, mais également celles de nombres *pairs* et *impairs*.

En définissant les *nombres premiers*, qui sont des espèces de "nombres que l'on ne peut pas casser", on va tomber sur des résultats intéressants. Notamment le fait qu'avec les nombres premiers, on peut représenter tous les autres nombres et ceci de façon unique ! Et ceci va nous simplifier la vie pour trouver le *PDGD* de deux entiers par exemple...

> « *En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux.* »
>
> Eric Temple Bell

---

1 Multiples et diviseurs

Définition 1 *Soient m et n deux entiers relatifs.*
• *n est* **multiple** *de m si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $n = k \times m$.*
• *Pour $m \neq 0$, m est un* **diviseur** *de n si et seulement si m est un* **multiple** *de m, si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par m est 0.*

Exemples

• $-42 = 6 \times (-7)$ donc -42 est un multiple de -7 et de 6.
• 0 est un multiple de tout entier relatif m car $0 = m \times 0$.
• 1 est un diviseur de tout entier relatif n car $n = 1 \times n$

Proposition 2 *La somme de deux multiples d'un même entier relatif a est aussi un multiple de a.*

Démonstration

On va faire la démonstration pour les multiples de 5 (mais la démonstration est la même pour tout autre multiple !)
On peut déjà remarquer que la proposition peut se réécrire :

« Si m et n sont deux multiples de 5, alors $m + n$ est un multiple de 5. »

Prenons donc ces deux entiers m et n : il existe donc deux entiers h et k tels que $m = 5h$ et $n = 5k$. On en déduit donc que

$$m + n = 5h + 5k = 5(h + k)$$

Comme h et k sont des entiers, alors $h + k$ est également un entier. Donc $m + n$ est un multiple de 5.

□

Exercice - En Python

On a défini la fonction **moultipass**[1] qui a pour arguments deux entiers a et b, b étant non nul.

```
def moultipass(a,b)
    return (a%b==0)
```

1. Quelle sortie obtient-on en exécutant les instructions : **moultipass(25,4)** ; **moultipass(25,4)** ?
2. Quel est le rôle de la fonction moultipass ?

[1] "*Lilou Dallas Multipass*", Le Cinquième Élément - Luc Besson, 1997.

2 Nombres pairs et impairs

Définition 3 *Un nombre entier n est* **pair** *si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.*
Un nombre entier n est **impair** *si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.*

Proposition 4 *Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.*

Démonstration

Soit n un nombre impair. On sait donc qu'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2$$

(on a utilisé l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2k$ et $b = 1$). On obtient donc, en simplifiant,

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Comme on doit montrer que n^2 est impair, il faut écrire n^2 sous la forme $2h+1$ pour un certain entier h ... Allons-y !

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{:=h}) + 1 = 2h + 1$$

On a posé $h = 2k^2 + 2k$ (qui est bien un entier !).
On en déduit donc que n^2 est un nombre impair.

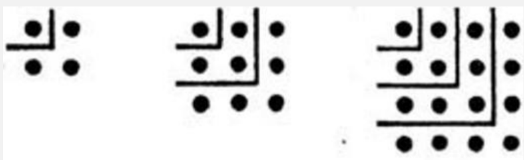
$\square$

Exercice : Raisonnement par disjonction de cas sur la parité

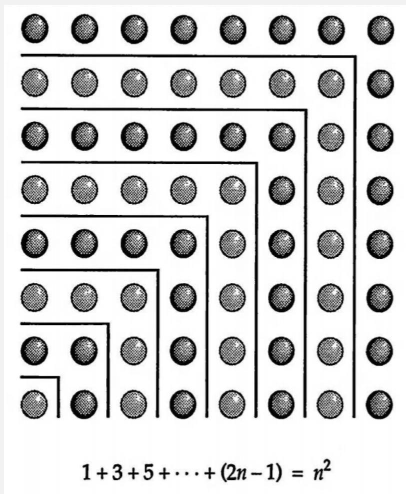
Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 - 1$ soit un multiple de 4 ?

Preuve sans mots

Il s'agit d'une "démonstration" de la somme des nombres impairs. Elle a été trouvé par Nicomaque de Gérase en (l'an) 100. Une telle représentation graphique permet de démontrer d'un seul coup d'œil que la somme des nombres impairs est égale à la suite des nombres carrés ...



$1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$



Remarque

En mathématiques, une preuve sans mots (ou une démonstration visuelle) est une démonstration d'une identité (ou d'une affirmation mathématique plus générale) à l'aide d'un diagramme ou d'un dessin la rendant évidente, sans qu'un texte plus explicite le commentant soit nécessaire. Malgré les risques qu'elles présentent, ces démonstrations sont souvent considérées comme plus élégantes que des preuves mathématiquement plus rigoureuses.

Un peu d'histoire

Nicomaque de Gérase, né à Gérase (actuelle Jerash, en Jordanie), vécut en 150 (d'autres sources donnent 50 - 120) est un mathématicien et philosophe néo-pythagoricien. Il est mort en 196 selon le philosophe John M. Dillon - ou en 142 (selon Andrew H. Criddle).
Dans son ouvrage *Introduction à l'arithmétique*, il étudie les nombres et cherche leurs propriétés métaphysiques. Ce n'est donc pas une œuvre en arithmétique au sens où on l'entendrait de nos jours. Il définit néanmoins les nombres pairs et impairs, les nombres premiers et composés, les nombres parfaits et remarques plusieurs propriétés intéressantes ...

3 Nombres premiers

Définition 5 *Un nombre entier naturel est un* <u>*nombre premier*</u> *s'il admet exactement deux diviseurs positifs (qui sont 1 et lui-même).*

Exemples

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Chercher des nombres premiers est un problème très ancien ! Eratosthène (276 av. J.-C. - 194 av. J.-C.) proposait une méthode afin de les trouver. On va l'illustrer sur un exemple : prenons la liste des entiers naturels jusqu'à 50 et barrons 1 (car 1 n'est pas premier !).

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Puis Eratosthène eu l'idée suivante : "*Mais si je barre tous les multiples de* 2 *(autres que* 2*), bah c'est sûr que les nombres barrés ne sont pas premiers puisqu'un nombre premier n'a que* 1 *et lui-même en diviseur !* " Donc il barre tous les multiples de 2 :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

"*Nom de Zeus !*" dit Eratosthène (bon en fait, c'est Doc dans "Retour dans le futur" qui dit ça ...) Eratosthène constate qu'il s'est débarassé d'un bon paquet de nombres qui ne sont pas premiers ! Il continue en se disant : "*Mais maintenant si je barre tous les multiples de* 3 *(autres que* 3*), bah c'est sûr que les nombres barrés ne sont pas premiers puisqu'un nombre premier n'a que* 1 *et lui-même en diviseur !* " Donc il barre tous les multiples de 3 :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Eratosthène se frotte les mains et il continue en se disant : "*Mais maintenant si je barre tous les multiples de* 5 *(autres que* 5*), bah ...!* " Oui, c'est bon, on a compris ... Donc il barre tous les multiples de 5 :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Puis les multiples de 7 (sauf 7) :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Et voilà le travail ! Il ne reste que des nombres premiers ! Bien évidemment, si on prend un nombre plus grand que 50 et que l'on regarde les nombres premiers qui lui sont inférieurs, il ne faudra pas s'arrêter à 7 comme diviseur mais aller au-delà. La proposition qui suit peut nous aider à ne pas faire trop de calculs ...

Proposition 6 Test de primalité *(admis)*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si n n'admet pour diviseur aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

On pourrait se demander en quoi ce théorème est si intéressant que ça. Il est très efficace pour décider si un nombre est premier ou non ! Par exemple, si l'on doit utiliser le crible d'Eratosthène pour savoir si 101 est premier, ça peut être un peu long (et encore plus si l'on ne connait pas ses tables de multiplications ...). Tandis qu'avec cette proposition, voici comment on procède :
On prend la racine carré de 101 (qui vaut environ $10,05$). Puis on regarde les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{101}$. Cool ! Il y en a pas beaucoup : $2, 3, 5, 7$. Enfin, on regarde si ces 4 nombres premiers divisent 101 : ça n'est pas le cas ! Donc, d'après le test de primalité, on en déduit que 101 est premier. Simple, rapide, élégant !

1 JAN *Un peu d'histoire*

Ératosthène de Cyrène, ou simplement Ératosthène, est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec du iiie siècle av. J.-C. (Cyrène, v. -276 – Alexandrie, Égypte, v. -194).
Il est surtout connu pour avoir mesuré la circonférence de la Terre avec ... un bâton et un chameau ... Il trouva environ 39500 km. En sachant qu'aujourd'hui, avec les techniques modernes, on sait que la circonférence de la Terre est 40075 km. Il s'est trompé seulement de 575 km ... soit une erreur d'environ 1,5% ... Calcul fait, il y a plus de 2200 ans avec un bâton et un chameau !

A raconter au prochain repas de famille

2020 n'est pas un nombre premier. La prochaine année première sera 2027. Et les suivantes : 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099 ...

Algorithme

```
from math import*
# pour avoir la fonction sqrt()
def prime(n):
    assert n >=2 # on impose n supérieur ou égal à 2
    d=2
    while(d<=sqrt(n)) and (n%d!=0):
        d=d+1
    return(d > sqrt(n))
```

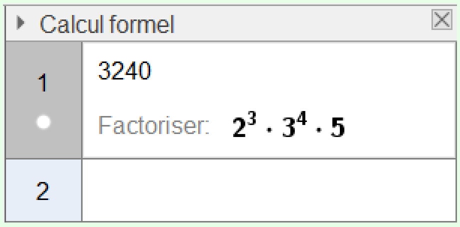
Proposition 7 *(rappel)*
Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit soit comme une puissance d'un nombre premier, soit comme un produit de puissances de nombres premiers.
Cette écriture est unique, à l'ordre des facteurs près.

Exemple

$25 = 5^2$
$1116 = 2^2 \times 3^3 \times 31$

Avec Geogebra

En cliquant sur *Affichage*, puis sur *Calcul formel*, entrez un nombre et cliquez sur la touche 15 3·5, on peut décomposer un nombre comme un produit de puissances de nombres premiers, comme le montre l'exemple ci-dessous (avec 3240)



Exercice

Décomposer 2019 en un produit de puissances de nombres premiers.

PGCD de deux entiers

On rappelle que le *PGCD* de deux entiers naturels est leur plus grand diviseur commun. On note $PGCD(a, b)$ le pgcd des nombres a et b.
Nous allons calculer $PGCD(72, 132)$ de quatre manières différentes :

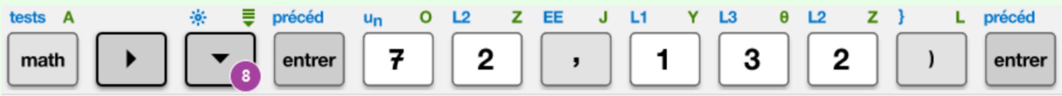
Méthode 1 :
On énumère tous les diviseurs des deux nombres.
Les diviseurs de 72 sont : $1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72$.
En effet : $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$.
Les diviseurs de 132 sont : $1; 2; 3; 4; 6; 11; 12; 22; 33; 44; 66; 132$.
En effet : $132 = 1 \times 132 = 2 \times 66 = 3 \times 44 = 4 \times 33 = 6 \times 22 = 11 \times 12$.

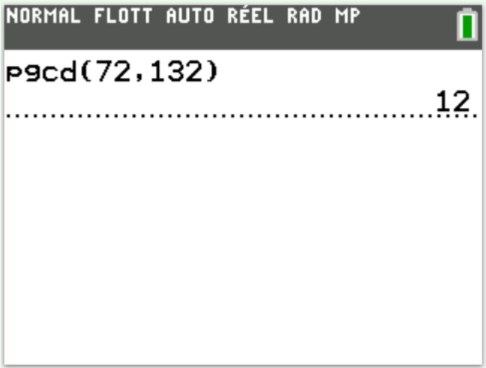
Les diviseurs communs (présents dans les deux listes) sont : $1; 2; 3; 4; 6; 12$. Le plus grand diviseur commun est donc : 12.

Méthode 2 :
On décompose les deux nombres en produits de facteurs premiers.
$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$ $132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3^1 \times 11^1$
Pour calculer le pgcd, on sélectionne les facteurs communs (présents dans les deux produits) ; s'ils figurent avec des exposants, nous leur attribuons leur plus petit exposant ; ensuite nous effectuons le produit :

$$PGCD(72, 132) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

PGCD de deux entiers sur la TI-83 Premium CE
Il est possible de calculer le PGCD de deux entiers sur la TI-83 Premium CE. Voici l'historique des touches :





4 Le jeu de Juniper Green

Le jeu de Juniper Green

Ce jeu se joue à deux, chaque joueur prenant un stylo de couleur différente.
On dispose d'une grille contenant les n entiers consécutifs $1, 2, 3, ..., n$.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Exemple avec $n = 25$

Règles :
1. *Le Joueur 1 choisit un nombre entre 1 et n, le barre sur la grille et note son choix.*
2. *A tour de rôle, chaque joueur choisit un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire et inférieur à n, et le barre sur la grille.*
3. *Un nombre ne peut être joué qu'une seule fois.*

Essayons de craquer un peu ce jeu ...
Est-il possible de gagner à coup sûr à ce jeu et en très peu de coups ?
Inversement, quel nombre doit-on initialement choisir pour cocher le plus possible de nombres sur la grille ?

Ce jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école Juniper Green, d'où son nom. Vous pouvez retrouvez ce jeu en ligne ! Il a été développé par Julien Pavageau, professeur de mathématiques et RUPN au collège Albert Camus de Frontenay Rohan

5 Ouverture

Dans ce chapitre, nous avons revu nos chers amis les nombres premiers. Même si leur définition est très simple, encore aujourd'hui, plusieurs propriétés concernant ces nombres nous échappent ... On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers (on doit cette démonstration, pas très compliquée, à Euclide vers 300 av. J.-C). Mais, on peut s'amuser à regarder les nombres premiers qui ont un écart de 2 (5 et 7, 11 et 13, 17 et 19 ...) : on appelle ça des *nombres premiers jumeaux.* A l'heure actuelle, on ne sait pas s'il en existe une infinité ...
Regardez cette vidéo très réussie de *Science étonnante* sur les nombres premiers

Alors revenons un peu sur la décomposition en nombres premiers... Elle peut paraître très simple, naturel, voire enfantine. Par exemple, $12 = 3 \times 4$ ou $24 = 2^3 \times 3$... Et il parait "évident" que cette décomposition soit unique... Que nenni !
Prenons par exemple l'ensemble des nombres pairs et appelons le $\mathcal{P}$. Donc on a

$$\mathcal{P} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24...\}$$

On va supposer que l'on ne connaît QUE ces nombres : les nombres pairs (et que l'on a jamais entendu parlé de notre vie des nombres impairs). Vous allez voir qu'il va se passer des choses étranges...
Prenons 60. Incontestablement, $60 \in \mathcal{P}$. De plus, on a

$$60 = 10 \times 6$$
$$60 = 30 \times 2$$

Mais vous me direz "Ouais et ?". Eh bah, DANS $\mathcal{P}$, 30, 10, 6 sont des nombres premiers ! Vous allez me dire "Bah non ! On a bien $30 = 15 \times 2$ par exemple !". Oui mais 15 n'appartient pas à $\mathcal{P}$, et rappelez vous, on n'a dit que l'on ne connaissait que les nombres pairs ! Idem pour 10 qui s'écrit 5×2 ($5 \notin \mathcal{P}$) et pour 6 qui s'écrit 3×2 ($3 \notin \mathcal{P}$).
Donc, ce qui est incroyable ici, c'est que l'on n'a pas une décomposition unique en nombres premiers, et donc comme disait en début de chapitre, Eric Temple Bell, *« En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux. »*

Question ouverte : Est-ce que vous pensez que tous les entiers naturels s'écrivent comme une somme d'entiers au carré (par exemple $13 = 2^2 + 3^2$) ?

Culture scientifique : Vous pouvez aller voir cette autre vidéo de Science étonnante sur l'application des nombres premiers aux codes secrets.